Universidad Zaragoza

1542

Trabajo Fin de Máster

Semejanza de figuras geométricas y teorema de Thales en 2º de la E.S.O., una propuesta didáctica.

Similarity of geometrical figures and Thales' theorem in 2nd of E.S.O., a didactical proposal.

Autor

Ernesto Antonio de Bonrostro Ramón

Directora

Carmen Julve Tiestos

Facultad de Educación

2018

Índice

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

1.- Nombre del objeto matemático a enseñar

El objeto matemático que queremos enseñar es ***la semejanza de figuras geométricas***.

La enseñanza de este objeto conlleva la enseñanza de otros objetos matemáticos como son la escala y el teorema de Thales.

2.-Curso y asignatura en la que situamos el objeto matemático

Según la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, la semejanza de figuras geométricas aparece dentro de los contenidos del *Bloque 3. Geometría* de la asignatura Matemáticas de 2º de E.S.O., concretamente estos son los contenidos que se citan:

> Semejanza: figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos similares.

En cuanto a los criterios de evaluación que aparecen en dicha orden son los siguientes:

> Crit.MA.3.4. Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.

Y en lo que se refiere a los estándares de evaluación, se indican los siguientes:

> Est.MA.3.4.1. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes.
>
> Est.MA.3.4.2. Utiliza la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza.

Es cuando menos curioso que, según la L.O.M.C.E., el Teorema de Thales no aparece en los contenidos hasta 3º de la E.S.O., sin embargo, tanto en los libros de texto consultados como en nuestra propia propuesta, lo incorporamos en el estudio como una consecuencia natural del estudio de la semejanza.

3.- ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

En este apartado vamos a hacer un breve resumen de los campos de problemas, técnicas y tecnologías que trataremos con mayor detalle en apartados posteriores.

El campo de problemas que vamos a enseñar para justificar su razón de ser e introducir el concepto de semejanza, va a ser, por un lado, **la comparación de formas geométricas** y, por otro lado, **la interpretación de planos y mapas**. A partir de figuras semejantes, se pretende que los alumnos comprendan la relación entre medidas y las áreas de dichas figuras.

Para justificar la introducción del Teorema de Thales se propondrá un campo de problemas basado en medidas inaccesibles mediante el uso de triángulos semejantes, y se relacionará este problema con las razones de ser históricas que dieron lugar a este campo de problemas.

En concreto los campos de problemas que enseñaremos son los siguientes:

C1: Figuras semejantes y propiedades.

C2: Razón de semejanza en longitudes y áreas.

C3: Escalas y aplicaciones.

C4: Teorema de Thales.

C5: División de segmentos.

C6: Distancias inaccesibles.

Las técnicas que se pretenden enseñar con la introducción del objeto son:

- Criterios para identificar triángulos semejantes.
- Calculo de la razón de semejanza entre figuras semejantes: Dividir las longitudes de dos lados homólogos de las figuras semejantes.
- Relación entre la razón de semejanza, la razón de perímetros y la razón de áreas.
- Calculo de la escala de un plano o mapa: Dividir una longitud del plano o mapa por la longitud real correspondiente.
- Interpretar la escala de un mapa o plano.

- Calcular una longitud real interpretándola escala de un mapa.
- Calcular la longitud sobre un mapa, dada una longitud real y una escala.
- Triángulos en posición de Thales.
- División de un segmento en partes iguales y/o proporcionales.
- Técnicas para medir distancias inaccesibles.

En cuanto a las tecnologías que justifican las diferentes técnicas se realiza mediante:

- Propiedades de los triángulos y relación entre sus ángulos.
- Definición de semejanza, razón de semejanza, razón entre longitudes, razón entre áreas y razón entre volúmenes.
- Definición de escala y tipos de escalas.
- Demostración del teorema de Thales.

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

1.- Análisis de tres libros de texto

Analizaremos tres libros de texto y realizaremos una comparación entre ellos para ver de qué maneras introducen el objeto matemático a estudio. Describiremos, por tanto, las características principales que se presentan con respecto a la introducción y tratamiento de la semejanza de figuras geométricas y Thales durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Los libros analizados son:

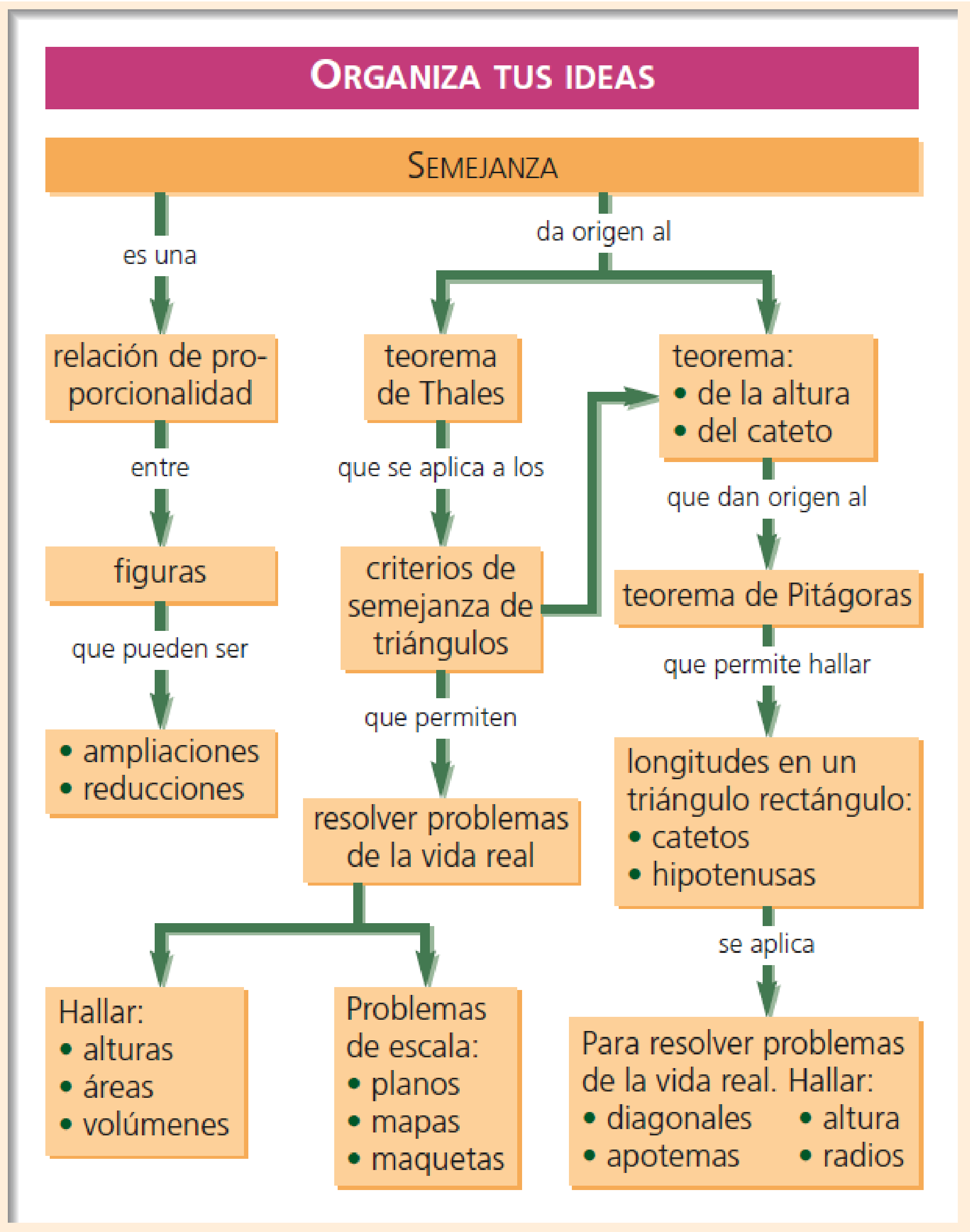
- Grupo Editorial Bruño, SL. Matemáticas de 2º ESO. Autores José María Arias Cabezas e Ildefonso Maza Sáez. Año 2011.
- Centro para la Innovación y Desarrollo para la educación a distancia. Matemáticas 2º ESO. Año 2009.
- Editorial Anaya. Matemáticas de 2º de ESO serie “En tus manos”. Autores J. Cólera e I. Gaztelu. Año 2005.

Comenzamos con el libro de **Editorial Bruño**. Nos situamos en la unidad 11, cuyo título es Semejanza. Teoremas de Thales y Pitágoras y que abre el bloque IV dedicado a la geometría y que también contiene las unidades 12 y 13 dedicadas al estudio de Cuerpos en el espacio y Áreas y volúmenes respectivamente.

Al inicio del bloque, se hace una introducción de lo que vamos a ver en dicho bloque de geometría y nos da unas muy interesantes pinceladas históricas del avance en el campo de la geometría a lo largo de la historia que repasa los principales trabajos y avances en geometría desde la época de los clásicos griegos hasta la actualidad.

Ya en la unidad 11, se comienza con una introducción de lo que se va a estudiar en la unidad. En este caso, lo primero van a ser las figuras semejantes, como son las ampliaciones y las reducciones. A continuación, se exponen las aplicaciones del teorema de Thales —cómo dividir geométricamente un segmento en partes proporcionales a otros, los criterios de semejanza de triángulos y aplicaciones a la vida real—. Con referencia al teorema de Thales, se estudia también la relación entre perímetros, áreas y volúmenes de figuras semejantes, y los planos, mapas y maquetas.

En la página 215 se presenta un interesante cuadro que pretende que se estructuren y se organicen las ideas de lo que se va a tratar respecto a la semejanza, que puede ser bastante útil para que los alumnos se hagan una idea de lo que van a aprender:



En la página 216, en el apartado 1, titulado “Figuras semejantes” comienza el contenido de semejanza.

Lo primero que hacen es dar una definición de figuras semejantes:

1.1. Figuras semejantes

Dos **figuras son semejantes** si tienen la misma forma, aunque el tamaño sea distinto. En dos figuras semejantes las longitudes de segmentos correspondientes son proporcionales.

Se llama **razón de semejanza o escala** al cociente entre dos longitudes correspondientes:

$$r = \frac{a'}{a}$$

En dos figuras semejantes, los ángulos correspondientes son iguales.

Y da el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Son semejantes un plano y el objeto que representa, un mapa y el terreno que representa, una maqueta y el objeto que representa, una foto y la imagen que representa.

Al no ser un ejemplo gráfico, no parece ser un buen ejemplo, pues en geometría, todo lo que se pueda ver mediante imágenes facilita la comprensión para alumno.

Después define lo que es una ampliación y una reducción conforme a la razón de semejanza, y vuelve a poner otro ejemplo, que de nuevo no es gráfico:

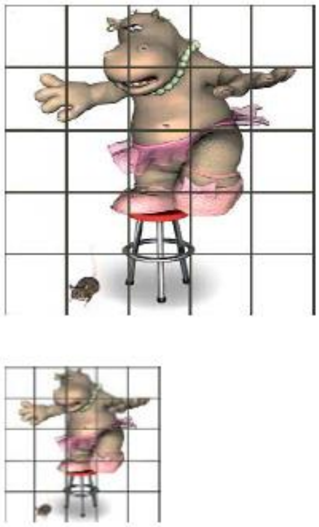
Ejemplo

En una fotocopiadora hacen ampliaciones y reducciones de los originales.

Una reducción al 50% es $r = 50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 1{:}2$

1:2 quiere decir que 2 unidades se convierten en 1

Posteriormente, nos presenta la técnica para construir figuras semejantes mediante cuadrículas y como ejemplo nos propone que dibujemos a escala 1:2 la siguiente figura, la cual **no parece especialmente sencilla para empezar**:



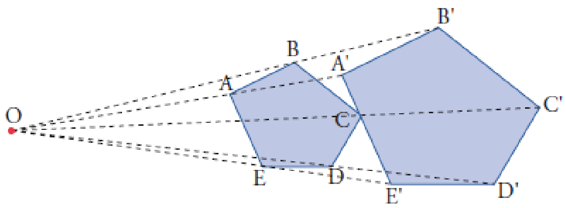
Y para finalizar el apartado de semejanza, en la página 217, nos muestra la técnica para construir figuras semejantes mediante proyecciones, y nos da el siguiente ejemplo, que **parece bastante acertado**:

Ejemplo

Dado el polígono ABCDE, dibuja otro polígono A'B'C'D'E' mediante una ampliación al 150%

Se toma un punto cualquiera O como centro de proyección, se une con cada uno de los vértices del polígono ABCDE y se prolonga.

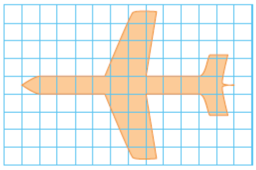
Como la ampliación es del 150%, se multiplica el segmento OA por 1,5 y el resultado se lleva desde el centro de proyección y es el punto A'.



Acaba el apartado con cuatro ejercicios, uno de cada tipo, para aplicar la teoría que ha visto hasta el momento.

Destacamos entre éstos al ejercicio 3:

3 Mediante la técnica de cuadriculado, haz un avión semejante al siguiente, pero con el doble de tamaño.

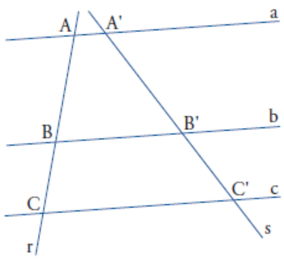


Que eliminando la parte del enunciado que nos indica la técnica del cuadriculado, **hubiera sido un buen problema de razón de ser, que hubiera podido generar en los alumnos muchas cuestiones que hubieran dado pie a la introducción de la semejanza de una manera más justificada.**

El apartado 2 se titula "Teorema de Thales", empieza directamente con la definición del teorema de Thales y con **un ejemplo demasiado abstracto y alejado de su razón de ser, que no sirve para captar la atención del alumno**:

Carné calculista

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} : \frac{7}{10}$$



1.44 × 1.8 ÷ 1.2 = **2,16**

2.1. Teorema de Thales

El **teorema de Thales** dice que si se traza un conjunto de rectas paralelas entre sí, **a, b, c…,** que cortan a otras dos rectas, **r** y **s,** los segmentos que se determinan sobre las rectas **r** y **s** son proporcionales:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

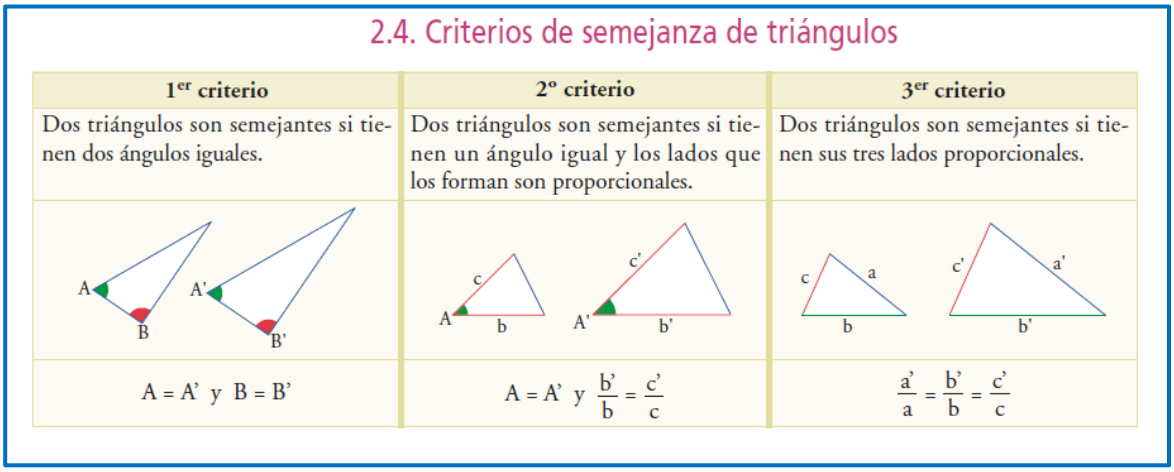
Ejemplo

Sabiendo que AB = 1,8 cm, BC = 1,2 cm y B'C' = 1,44 cm, halla la longitud del segmento A'B'

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \frac{A'B'}{1,8} = \frac{1,44}{1,2} \Rightarrow A'B' = 2,16 \text{ cm}$$

Continua con la técnica para dividir un segmento en partes proporcionales y la definición de los triángulos en la posición de Thales, **con ejemplos muy abstractos** para un adolescente de 13-14 años.

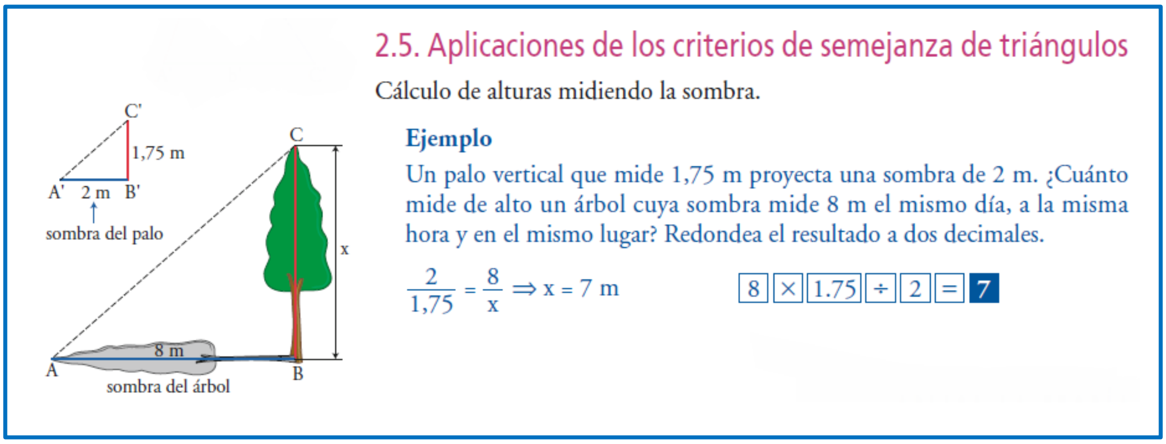
Después, en la página 219, nos introduce tres criterios de semejanza entre triángulos, todo ello **de una manera muy teórica y apenas sin ejemplos** que justifiquen la importancia de lo que se nos quiere enseñar:



2.4. Criterios de semejanza de triángulos

1er criterio	2º criterio	3er criterio
Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.	Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que los forman son proporcionales.	Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados proporcionales.
$A = A'$ y $B = B'$	$A = A'$ y $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$	$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$

Y finaliza el apartado con la aplicación de los criterios de semejanza de triángulos para el cálculo de alturas. En este caso con el famoso ejemplo de la sombra del árbol.



2.5. Aplicaciones de los criterios de semejanza de triángulos

Cálculo de alturas midiendo la sombra.

Ejemplo

Un palo vertical que mide 1,75 m proyecta una sombra de 2 m. ¿Cuánto mide de alto un árbol cuya sombra mide 8 m el mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar? Redondea el resultado a dos decimales.

$\frac{2}{1{,}75} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 7$ m $\boxed{8}\ \boxed{\times}\ \boxed{1.75}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{7}$

El tercer apartado se titula "Relaciones entre figuras semejantes" y comienza con las relaciones entre longitudes, áreas y volúmenes.

Nos muestra como las razones de semejanza de la longitud es r, del área es r^2 y del volumen es r^3. Después nos da la definición de escala, que ya la había dado en el apartado primero y nos diferencia cuándo es un plano o un mapa en función del tamaño de la escala. Finaliza el apartado hablando de las maquetas. Todo ello con algún ejemplo muy teórico para justificar la definición.

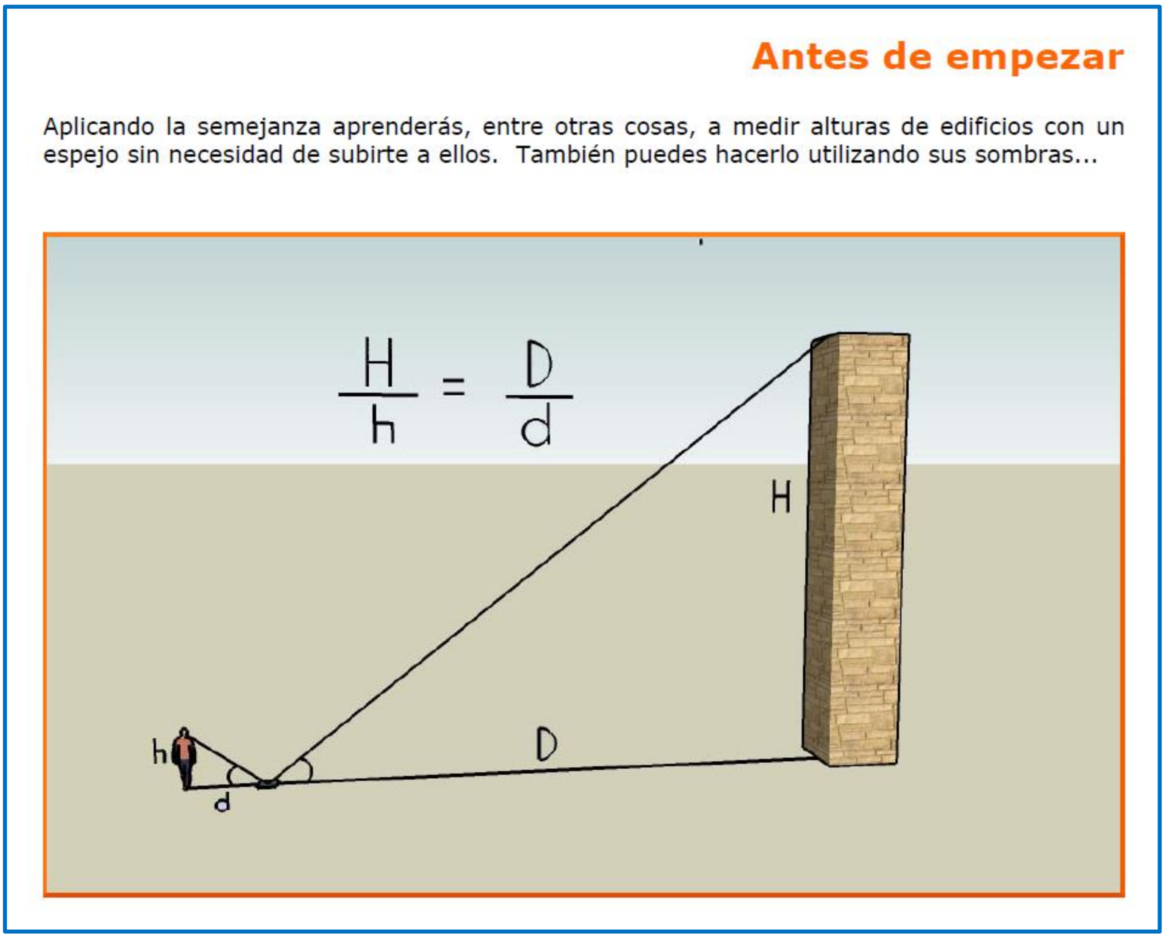
Para finalizar, hay una batería de ejercicios y algunos problemas para afianzar las técnicas que han aprendido en la unidad.

A destacar que, en la misma unidad, se explica al alumnado el uso de GeoGebra y CABRI, y se les guía en algunas construcciones.

En general, la introducción que ha hecho el libro de Bruño de la semejanza me ha parecido **poco motivadora y muy clásica**, con la típica estructura de introducir el concepto mediante la teoría y luego batería de ejercicios para aprender la técnica.

El siguiente libro, **de Matemáticas de 2º de ESO de CIDEAD**, trata la Semejanza en la unidad 7, junto con el teorema de Pitágoras.

La unidad comienza mostrándonos un problema de alturas inaccesibles, en la página 117, que justifica la razón de ser de la semejanza, y que motiva al alumno en el aprendizaje:



Además, nos plantea otro problema para que vayamos pensando e investigando sobre la semejanza y las razones entre las áreas de objetos semejantes, en este caso pizzas. Lo cual es otro claro ejemplo de un tipo de problemas que da sentido al objeto de estudio y justifica el estudio de todas las técnicas que se abordarán en la unidad.

Investiga

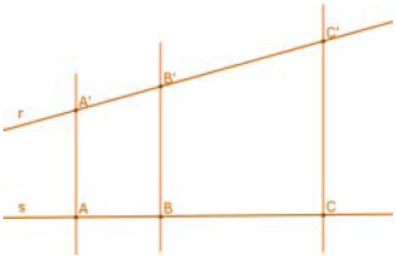
En una pizzería, la pizza pequeña tiene 23 cm de diámetro y es para una persona. Sin embargo, la pizza familiar tiene 46 cm de diámetro, justo el doble que la pequeña, pero dicen que es para 4 personas. ¿Nos están engañando?

En el apartado 1, en la página 118, se introduce el Teorema de Thales y la posición de Thales de dos triángulos:

1. Teorema de Tales

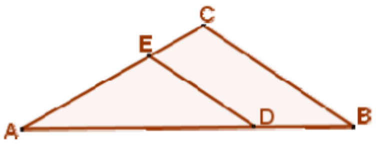
Enunciado y posición de Tales

Si varias rectas paralelas son cortadas por dos secantes r y s, **los segmentos que determinan dichas paralelas en la recta r son proporcionales a los segmentos que determinan en s.**



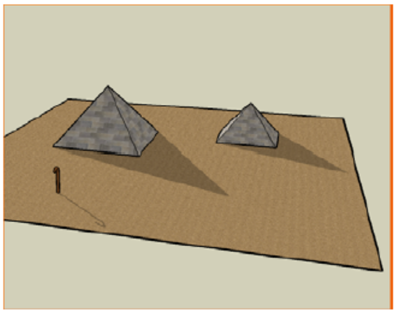
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$

Los triángulos ABC y AB'C' comparten el ángulo A, están encajados. Los lados opuestos al ángulo A son paralelos. En estos casos decimos que los dos triángulos están en **posición de Tales:**

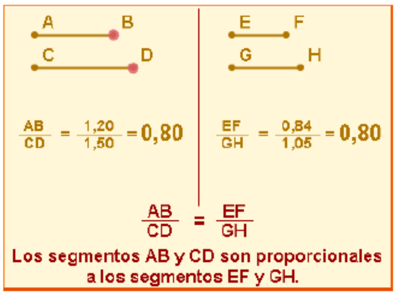


Cuando dos triángulos se pueden colocar en posición de Tales, **sus lados son proporcionales:**

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$$



Tales de Mileto fue un filósofo y matemático griego que vivió en el siglo VI a. C. Calculó las alturas de las pirámides de Egipto comparando sus sombras con las de un bastón

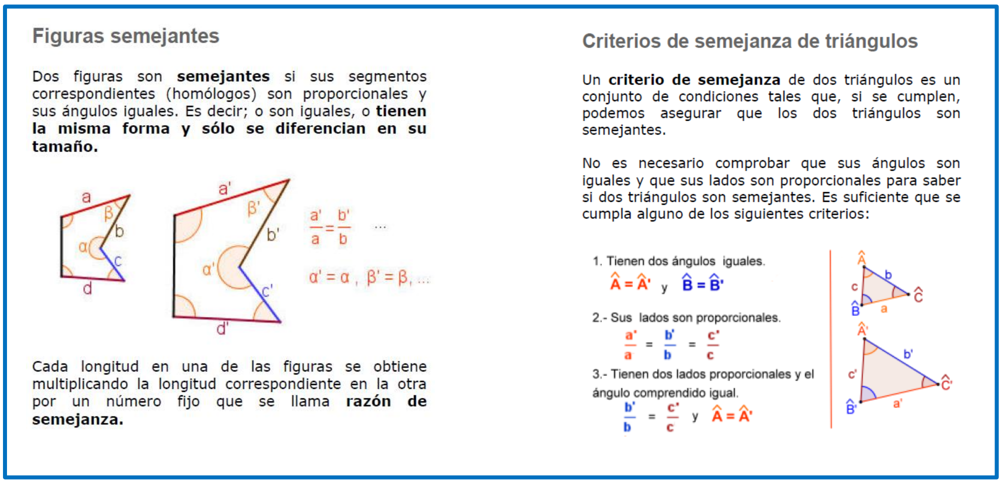


Dos pares de segmentos son **proporcionales** si la razón entre los dos primeros (cociente entre sus longitudes) coincide con la razón entre los dos últimos.

Además, nos dice quien fue Thales de Mileto y que midió las Pirámides de Egipto con la ayuda de un bastón y las sombras, lo que junto con el pequeño gráfico que se presenta puede servir para motivar al alumno. Pese a ello, la introducción del teorema de Thales es también **demasiado formal y se echa de menos algo de contextualización**.

También nos recuerda que son dos segmentos proporcionales, puesto que en el teorema de Thales y posición de Thales se nombra constantemente, pues se supone que es un concepto conocido, pero no está de más recordarlo.

En el siguiente apartado "Semejanza de figuras", en la página 120, se da la definición de figuras semejantes y los criterios de semejanza de los triángulos:



Figuras semejantes

Dos figuras son **semejantes** si sus segmentos correspondientes (homólogos) son proporcionales y sus ángulos iguales. Es decir; o son iguales, o **tienen la misma forma y sólo se diferencian en su tamaño.**

$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$ ...

$\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, ...

Cada longitud en una de las figuras se obtiene multiplicando la longitud correspondiente en la otra por un número fijo que se llama **razón de semejanza.**

Criterios de semejanza de triángulos

Un **criterio de semejanza** de dos triángulos es un conjunto de condiciones tales que, si se cumplen, podemos asegurar que los dos triángulos son semejantes.

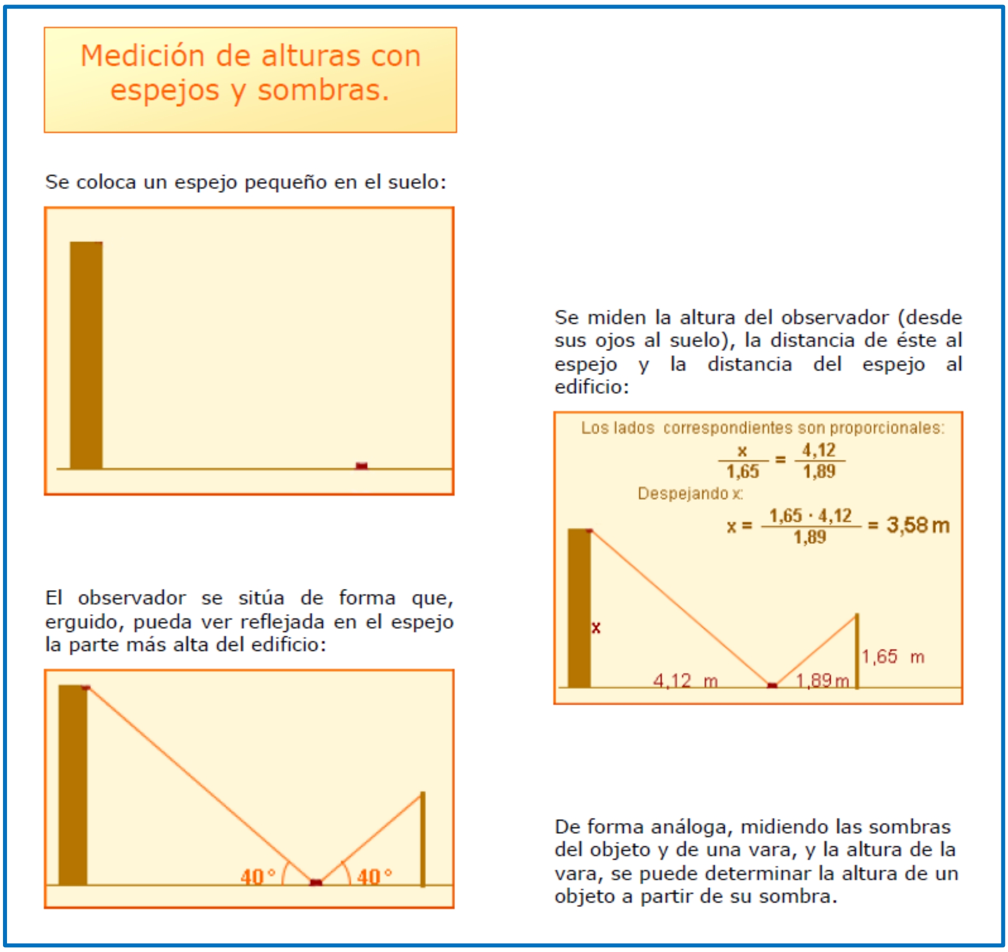
No es necesario comprobar que sus ángulos son iguales y que sus lados son proporcionales para saber si dos triángulos son semejantes. Es suficiente que se cumpla alguno de los siguientes criterios:

1. Tienen dos ángulos iguales. $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$

2.- Sus lados son proporcionales. $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$

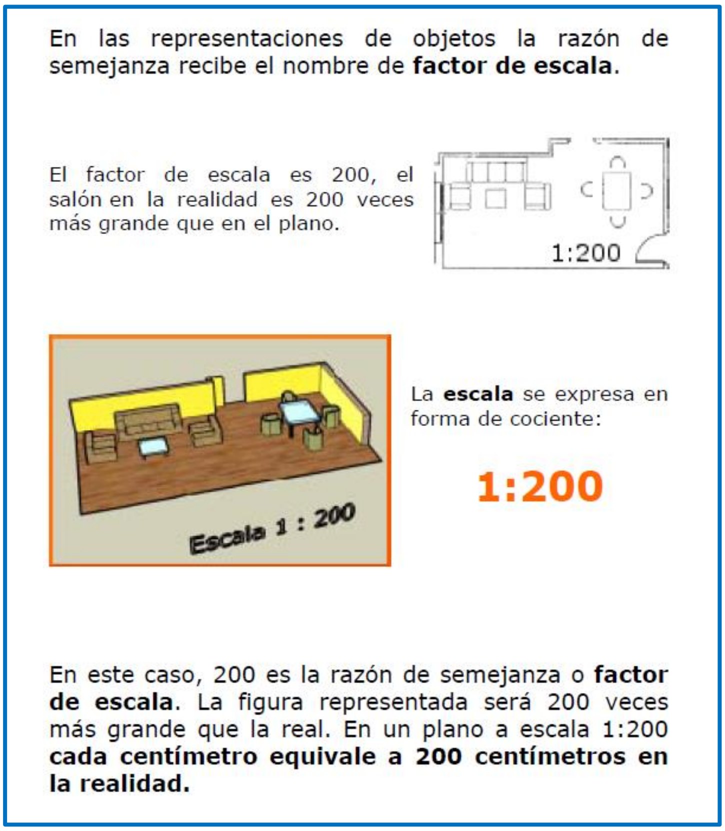
3.- Tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido igual. $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ y $\hat{A} = \hat{A}'$

Y a partir de aquí se nos muestra las aplicaciones de semejanza para medir alturas de edificios a través de su sombra o de un espejo, **de una manera muy poco hilada**, pues **no relaciona el teorema de Thales ni los triángulos en posición de Thales con la semejanza**, lo cual no facilita al alumnado relacionar lo que han visto en el apartado anterior con lo que acaban de ver respecto a la semejanza y directamente se plantean como resolver los problemas de medidas inaccesibles mediante "recetas", como por ejemplo en el siguiente ejemplo extraído de la página 121:



En el apartado 3, se nos explica la ampliación y reducción de figuras y el significado de la escala. Se plantean aplicaciones prácticas a planos y mapas y se menciona el pantógrafo como herramienta para ampliar y reducir dibujos o grabaciones.

En el ejemplo que se pone como factor de escala, en la página 123, **encontramos una errata**, donde dice "La figura representada será 200 veces más grande que la real" debería decir "200 veces más pequeña que la real":



Una vez finalizado el tema se proponen una serie de ejercicios para practicar, una ampliación con la razón de los volúmenes, resumen de la unidad y ejercicios de autoevaluación.

Aparte de los ejercicios para practicar las técnicas aprendidas, sería interesante que los alumnos inventasen problemas de lo visto.

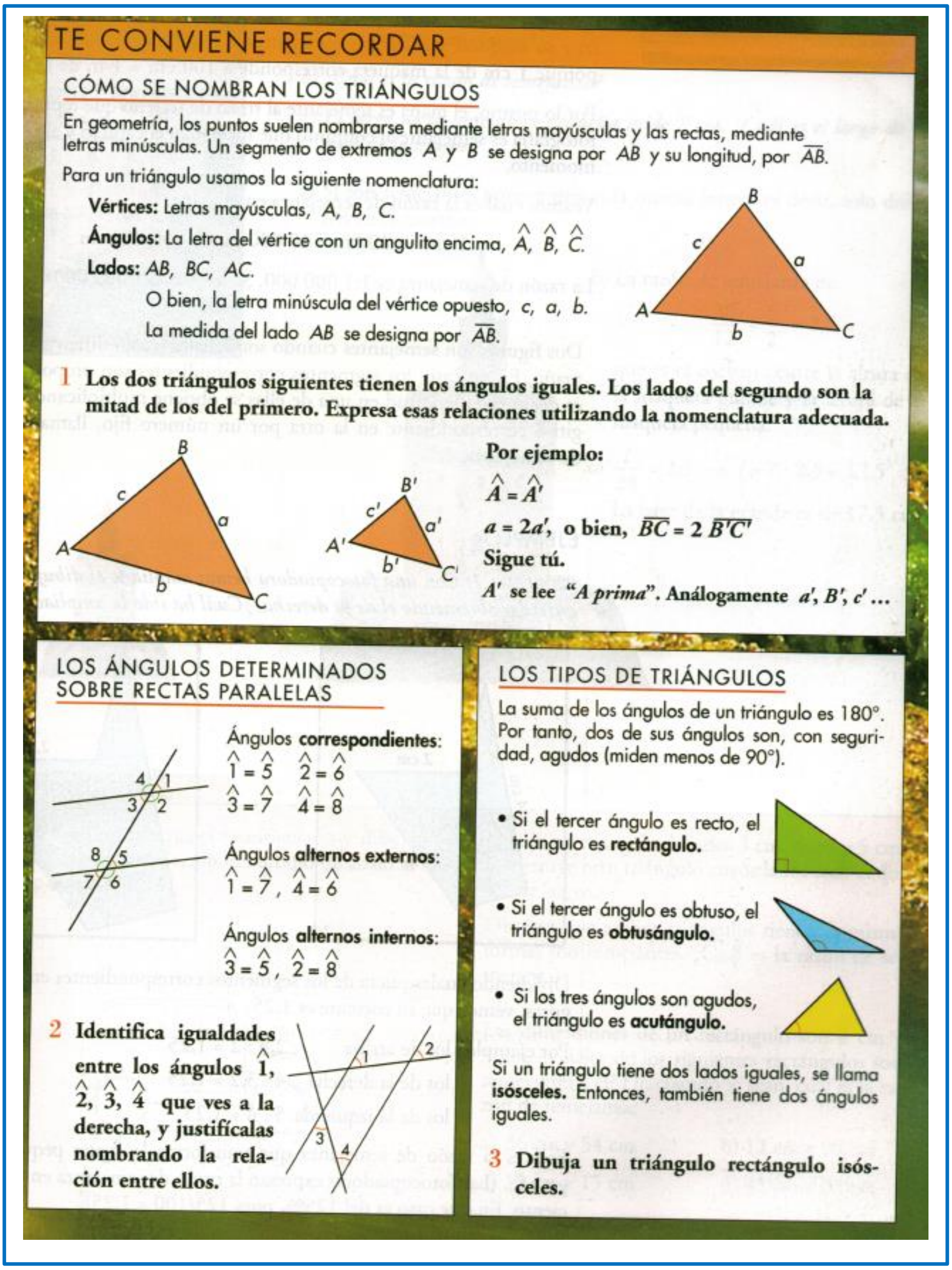
El tercer y último libro de texto que analizamos es el de **Matemáticas de 2º de ESO de Anaya del año 2005**, de J. Cólera e I. Gaztelu que corresponde a la serie "En tus manos".

La Semejanza se trata en la unidad didáctica 9, y comienza, en la página 172, con un problema donde se pretende que haya una reflexión sobre las ideas que se van a explicar durante la unidad. Este problema podría ser tomado como la razón de ser de los objetos matemáticos que vamos a introducir durante la unidad.


REFLEXIONA

- El capitán del barco está midiendo con la regla la distancia entre dos puntos del mapa. Señala 11,3 cm. ¿Cuál es la distancia real entre esos dos puntos?
- Sabiendo que el capitán mide 1,80 m de alto, ¿cuál es la longitud real del pez que se ve en la fotografía?
- La maqueta del barco está realizada de modo que una longitud de 1 cm corresponde a 1 m en la realidad. Si el volumen de agua que desplaza la maqueta cuando está hundida hasta la línea de flotación es de 5 600 cm^3, ¿cuál es el volumen de agua que desplaza el barco?

También, en la página 173, se hace un repaso para recordar la teoría referente a los elementos que conforman un triángulo, propiedades de los ángulos y clasificación de los triángulos, que los alumnos ya han visto en pasados cursos y que es importante conocer para empezar con este tema de semejanza.



TE CONVIENE RECORDAR

CÓMO SE NOMBRAN LOS TRIÁNGULOS

En geometría, los puntos suelen nombrarse mediante letras mayúsculas y las rectas, mediante letras minúsculas. Un segmento de extremos A y B se designa por AB y su longitud, por $\overline{AB}$.

Para un triángulo usamos la siguiente nomenclatura:

Vértices: Letras mayúsculas, A, B, C.

Ángulos: La letra del vértice con un angulito encima, $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$.

Lados: AB, BC, AC.

O bien, la letra minúscula del vértice opuesto, c, a, b.

La medida del lado AB se designa por $\overline{AB}$.

1 **Los dos triángulos siguientes tienen los ángulos iguales. Los lados del segundo son la mitad de los del primero. Expresa esas relaciones utilizando la nomenclatura adecuada.**

Por ejemplo:

$\hat{A} = \hat{A}'$

$a = 2a'$, o bien, $\overline{BC} = 2\,\overline{B'C'}$

Sigue tú.

A' se lee "*A prima*". Análogamente a', B', c' …

LOS ÁNGULOS DETERMINADOS SOBRE RECTAS PARALELAS

Ángulos **correspondientes**:

$\hat{1} = \hat{5}$ $\hat{2} = \hat{6}$

$\hat{3} = \hat{7}$ $\hat{4} = \hat{8}$

Ángulos **alternos externos**:

$\hat{1} = \hat{7}$, $\hat{4} = \hat{6}$

Ángulos **alternos internos**:

$\hat{3} = \hat{5}$, $\hat{2} = \hat{8}$

2 **Identifica igualdades entre los ángulos $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{4}$ que ves a la derecha, y justifícalas nombrando la relación entre ellos.**

LOS TIPOS DE TRIÁNGULOS

La suma de los ángulos de un triángulo es 180°. Por tanto, dos de sus ángulos son, con seguridad, agudos (miden menos de 90°).

- Si el tercer ángulo es recto, el triángulo es **rectángulo.**
- Si el tercer ángulo es obtuso, el triángulo es **obtusángulo.**
- Si los tres ángulos son agudos, el triángulo es **acutángulo.**

Si un triángulo tiene dos lados iguales, se llama **isósceles.** Entonces, también tiene dos ángulos iguales.

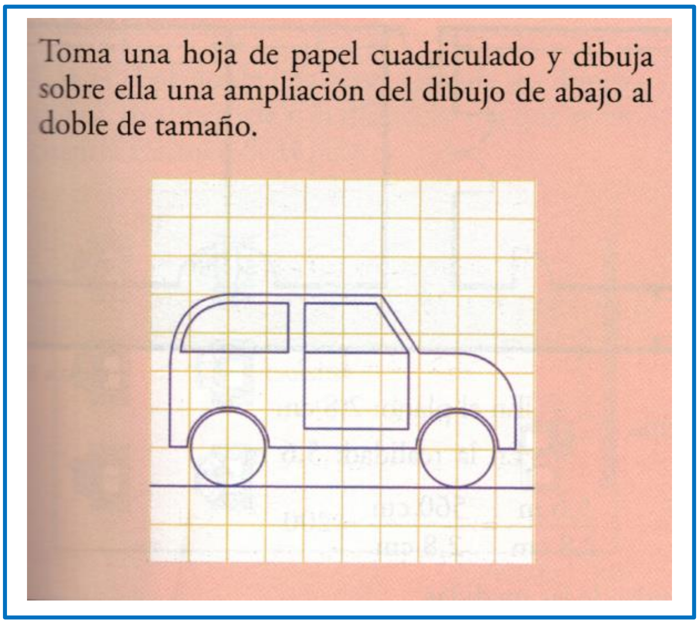
3 **Dibuja un triángulo rectángulo isósceles.**

En el primer apartado del tema, titulado “Figuras semejantes”, se introduce la semejanza haciendo referencia a la ilustración de la página anterior donde se ve al capitán del barco trabajando sobre un plano y con una maqueta del barco en primer plano.

En el texto dice: “*La maqueta que vimos en la primera página de esta unidad es igual que el barco en forma, color, …., en todo salvo en el tamaño. El barco y su maqueta son figuras semejantes. La razón de semejanza es 1:100 porque 1 cm de la maqueta corresponde a 100 cm = 1 m de la realidad*”.

Por una parte, **es apropiado contextualizar con la maqueta, y es correcto que tiene la misma forma que el barco, pero nombrar el color y dejar puntos suspensivos para que el alumno pueda imaginar lo que quiera** (como posición, orientación, textura,...) **puede llevar a confusión sobre que es la semejanza, cuando decir que tiene la misma forma sería suficiente y estaría ajustado a la definición matemática**.

En este mismo apartado, en la página 175, destacamos la primera actividad que se propone:

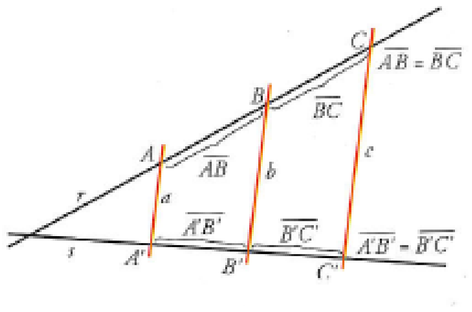


Este problema podría considerarse la razón de ser de la semejanza y haber servido para introducir el objeto de semejanza en el aula y plantear preguntas referidas a la semejanza como puede ser ¿cómo se amplía? ¿debo ampliar en el doble de longitud o el doble de área? ¿lo hago de una manera sumativa o multiplicativa? Estas son preguntas que surgirían si se hubiera planteado como un problema generador de la razón de ser.

El siguiente apartado, página176, está dedicado a los planos, mapas y maquetas. En él se explica que los planos y mapas son figuras semejantes a trozos del territorio que representan y se da la definición de escala. Creo que **este apartado está bien contextualizado y el alumno no debería tener dificultades en su comprensión**.

En el apartado 3, en la página 178, se dan los métodos de cuadrícula y proyección para construir figuras semejantes de una manera bastante sencilla y que tampoco entraña dificultad.

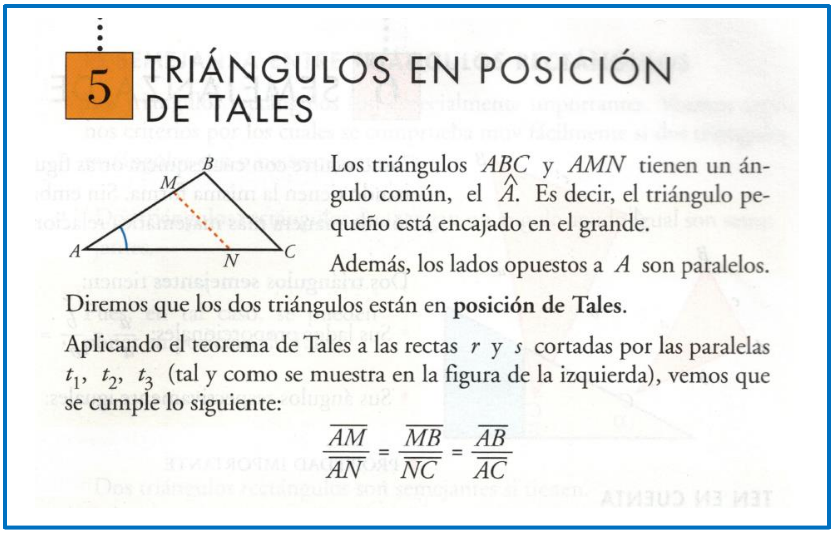
Ya en el apartado 4, que comienza en la página 180, se introduce el teorema de Thales con un ejemplo para que el alumno pueda mediante el uso de la regla comprobar las medidas de los segmentos y pueda conjeturar sobre la relación entre las medidas de segmentos sobre cada una de las rectas que son cortadas por las tres paralelas:



Las rectas *a*, *b* y *c* son paralelas y cortan a las rectas *r* y *s*.
Si los segmentos *AB* y *BC* son iguales, entonces los segmentos *A'B'* y *B'C'* son iguales.
Comprúebalo midiéndolos.

Después se pasa al enunciado formal del teorema de Thales. Todos los ejemplos y ejercicios propuestos en este apartado están descontextualizados. Como consecuencia de esto, es complicado que el alumnado vea la funcionalidad de este teorema y que no lo considere importante y mucho menos interesante.

En el apartado 5, página 180, se define cuando dos triángulos están en la posición de Thales:



5 TRIÁNGULOS EN POSICIÓN DE TALES

Los triángulos ABC y AMN tienen un ángulo común, el $\hat{A}$. Es decir, el triángulo pequeño está encajado en el grande.

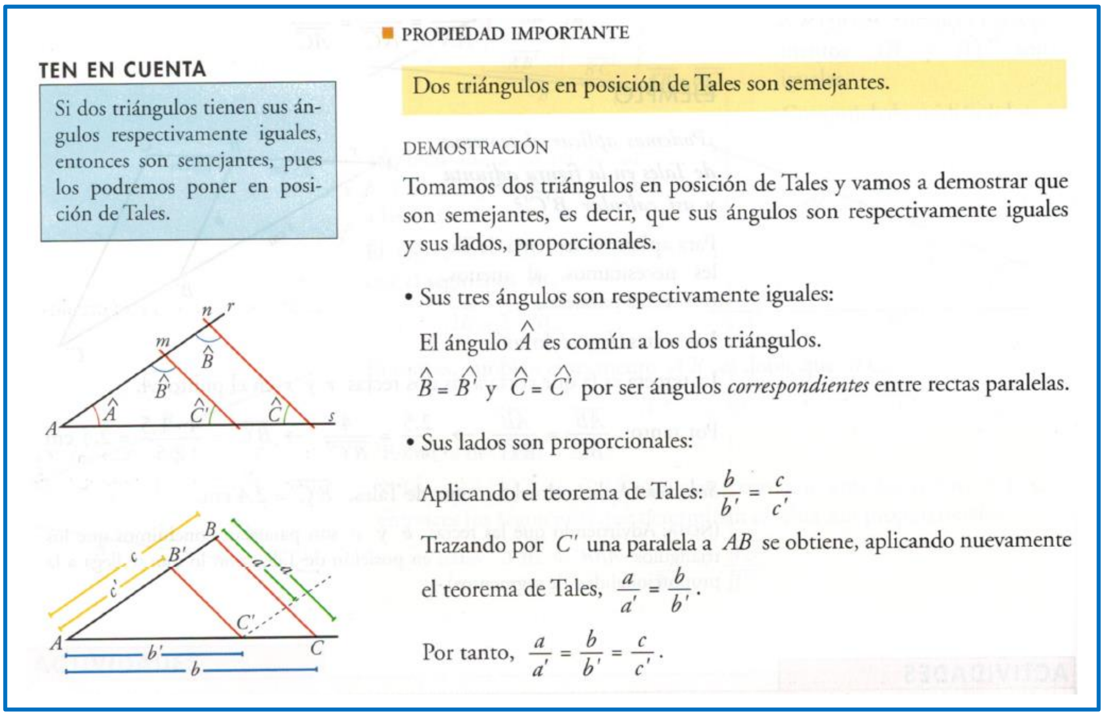
Además, los lados opuestos a A son paralelos.

Diremos que los dos triángulos están en **posición de Tales**.

Aplicando el teorema de Tales a las rectas r y s cortadas por las paralelas t_1, t_2, t_3 (tal y como se muestra en la figura de la izquierda), vemos que se cumple lo siguiente:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

Ya en el apartado 6, se da la definición de semejanza entre triángulos y aparece la primera y única demostración de todo el tema, que seguro ayudará a los alumnos a tener una mejor concepción de la semejanza entre triángulos: Dos triángulos en posición de Thales son semejantes:



TEN EN CUENTA

Si dos triángulos tienen sus ángulos respectivamente iguales, entonces son semejantes, pues los podremos poner en posición de Tales.

PROPIEDAD IMPORTANTE

Dos triángulos en posición de Tales son semejantes.

DEMOSTRACIÓN

Tomamos dos triángulos en posición de Tales y vamos a demostrar que son semejantes, es decir, que sus ángulos son respectivamente iguales y sus lados, proporcionales.

- Sus tres ángulos son respectivamente iguales:

El ángulo $\hat{A}$ es común a los dos triángulos.

$\hat{B} = \hat{B}'$ y $\hat{C} = \hat{C}'$ por ser ángulos *correspondientes* entre rectas paralelas.

- Sus lados son proporcionales:

Aplicando el teorema de Tales: $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Trazando por C' una paralela a AB se obtiene, aplicando nuevamente el teorema de Tales, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$.

Por tanto, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

En el apartado 7 de la unidad, que ya es el último, se dan dos aplicaciones de la semejanza de triángulos para calcular alturas inalcanzables.

En general, **en toda la unidad se echa de menos una mayor contextualización de los ejemplos y problemas que justifiquen la importancia de la semejanza y generen interés al alumno para trabajar sobre el objeto.**

También me ha llamado la atención que **no se haya mencionado en toda la unidad a Thales de Mileto** y puesto como ejemplo la medición de la pirámide de Keops con la ayuda de la sombra del sol y un bastón, pues este tipo de historias o curiosidades son las que más llaman la atención a los alumnos y habría que aprovecharlo ya que la medición de la altura de las pirámides podría ser perfectamente la razón de ser de la semejanza, y **hay que sacar algún provecho a que al razón de ser histórica coincide con una posible razón de ser en el aula, como es la medición de alturas de edificios inaccesibles.**

Conclusión del análisis

Tras analizar los textos de los tres libros, podemos sacar las siguientes conclusiones:

- No hay un criterio establecido en cuanto al orden de los contenidos, ni para la profundidad con la que se introducir los conceptos.
- No hay una conexión o hilo conductor entre los contenidos que justifique el orden en que se presentan.
- La mayoría de los ejemplos que se presentan son muy artificiales y muy descontextualizados de la vida cotidiana, salvo los referidos a planos y mapas.
- El teorema de Thales siempre se introduce de una manera formal, lo cual no favorece la comprensión del mismo.
- No se parte de la razón de ser del objeto ni se aprovecha su conexión con la razón de ser histórica.
- En cuanto a las actividades que proponen los libros me parecen insuficientes para un aprendizaje significativo.

Todas estas reflexiones hacen ver la importancia de la figura del profesor, que será quien, en última instancia, decida cómo enseñar, con qué metodología y que actividades realizar para que los alumnos consigan tener un aprendizaje significativo.

2.- ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

En general, en los libros de texto analizados, para cada apartado el orden seguido es el siguiente:

1. Se da una explicación y/o definición del concepto a enseñar.
2. Se enseñan y trabajan las técnicas institucionalizadas.
3. En algunas ocasiones, se presentan las tecnologías que justifican las técnicas enseñadas.
4. Se proponen ejercicios y problemas. Al final de cada tema, se plantean algunos ejercicios y problemas, que se clasifican por los distintos bloques de técnicas que usarán para su resolución.

Los **campos de problemas** son los siguientes:

- Identificar figuras semejantes.
- Calcular lados desconocidos de figuras semejantes.
- Calcular las razones de semejanza entre figuras.
- Calcular distancias y áreas en planos y mapas.
- Aplicar el teorema de Thales.
- Calcular longitudes de lados de triángulos en posición de Thales.
- Calcular distancias inaccesibles a través de semejanza entre triángulos.
- Construcción de figuras semejantes mediante homotecias o proyecciones.

Las **técnicas** que se enseñan son las siguientes:

- El método de la cuadrícula para construir figuras semejantes.
- El método de la proyección.
- La fórmula del teorema de Thales.
- Los criterios de semejanza, especialmente de los triángulos.
- Triángulos en posición de Thales.
- Métodos para cálculo de distancias inaccesibles (uso de sombras, espejos, referencias para formar triángulos semejantes, …)

Los libros analizados no justifican los teoremas que aparecen en la presentación del objeto y tampoco apenas las técnicas utilizadas para la resolución de los ejercicios. Por tanto, en cuanto a las **tecnologías**:

- Se basan en la aplicación de las definiciones de razón de semejanza y de escala, y una vez introducido el teorema de Thales, éste se utiliza como justificación las técnicas de resolución de los ejercicios de elementos inaccesibles.
- También están basadas en las propiedades de los triángulos.

3.- ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

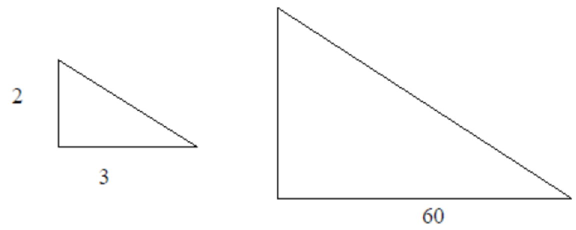
Tras el estudio de la unidad didáctica se pretende que el alumnado identifique figuras semejantes y calcule razones de semejanza. Además, será capaz de interpretar planos y mapas algo que está muy contextualizado. Deberían también ser capaces de resolver problemas de medida de longitudes de objetos inaccesibles.

Debido a **la presentación poco hilada del concepto de semejanza**, así como el **uso de razones de semejanza enteras y a la poca variación de los tipos de problemas**, así como la **presentación de estos en un marco poco contextualizado**, se generan ciertas dificultades en el aprendizaje, que fueron descritas por E. Gualdrón y A. Gutiérrez en el artículo "Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la semejanza" publicado en el simposio SEIEM en 2006.

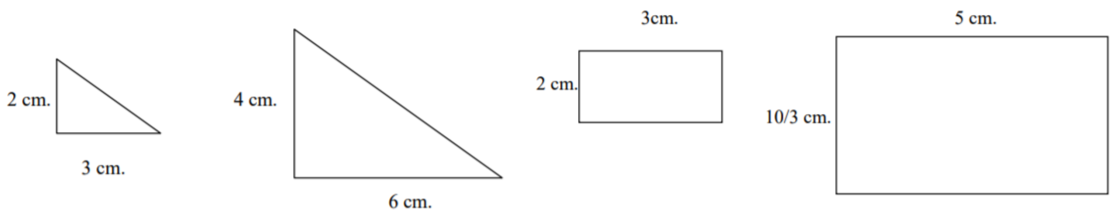
El artículo destaca las siguientes dificultades encontradas en el trabajo de Hart y otros (1981):

- Doble y mitad (*Doubling and halving*): cuando la razón no es 2:1, algunos estudiantes cuando se les pide ampliar, reducen, y cuando se les pide reducir, amplían.

- Construcción progresiva (*Build up*): en algunas ocasiones los alumnos evitan multiplicar fracciones y tienden a realizar una construcción progresiva a partir de una relación que establecen entre los elementos de la problemática. Por ejemplo, Cuando se les pide que hallen la altura del triángulo grande, establecen una relación de 3 a 2 y luego 6 a 4, 9 a 6, 12 a 8, y así sucesivamente hasta llegar a 60 a 40, para concluir que el lado mide 40.



- Estrategia multiplicativa: el alumnado tiende a afirmar que una figura es semejante a otra cuando las medidas de los lados de una son múltiplos de los de la otra. Y recíprocamente, cuando se observa que las medidas de los lados de una figura no son un múltiplo entero de las medidas de los lados de la otra, los estudiantes tienden a decir que no son figuras semejantes.



En el primer caso, dirían que es semejante sin comprobar que el ángulo es recto, y en el segundo caso, responderían que no son figuras semejantes puesto que 5 no es múltiplo de 3.

- Estrategia aditiva o de la diferencia constante: es otro método erróneo que algunos alumnos usan para evitar multiplicar fracciones. Si por ejemplo se les pidiera ampliar la figura de la izquierda de tal forma que la final tuviera base 12 cm:

Algunos estudiantes dan como respuesta que la altura de la nueva figura es 10 cm.

O bien restan los lados correspondientes a cada rectángulo, 12-5=7, y a este valor sumarle la altura del primer rectángulo: 7+3=10, o bien, restan los lados del primer rectángulo, 5-3=2, y este valor se lo restan al lado conocido del rectángulo ampliado: 12-2=10.

- Omisión de parte de los datos del problema: es muy común que, en la resolución de problemas de razón y proporción, los alumnos ignoren parte de los datos del problema. Por ejemplo, si se les pregunta: ¿En qué terreno juegan más apretados los niños, en un campo de futbol de 12 $m2$ de área con 6 niños o en uno de 16 $m2$ con 8 niños? Ellos responderán "el segundo, puesto que hay más niños en el terreno"

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

1.- ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Previamente a la introducción de los conceptos semejanza y en consecuencia Thales, es necesario que los alumnos posean previos conocimientos en algunos bloques de matemáticas como el de números, algebra y principalmente Geometría, entre ellos:

1. Conocer conceptos como punto, recta, segmento, ángulo y medida, proporcionalidad.
2. Identificar tipos de triángulos teniendo en cuenta sus lados y ángulos. Conocer las propiedades básicas del triángulo.
3. Conocer el concepto de rectas paralelas, secantes y perpendiculares.
4. Operar con fracciones, decimales, racionales
5. Saber hacer uso de las unidades de medida.
6. Álgebra elemental: saber operar con ecuaciones de una incógnita.

Además, como la secuencia didáctica se desarrolla en un entorno basado en la resolución de problemas, es necesario que el alumno sea capaz de desplegar estrategias y técnicas para abordar los problemas y comprender las relaciones matemáticas que surgen de ellos.

2.- La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera estos conocimientos previos?

Según el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria, todos los conocimientos necesarios para la introducción del concepto, se han dado ya en esta etapa.

Hemos señalado los contenidos en Primaria necesarios para introducirles el objeto de semejanza:

Educación Primaria		
Bloque 2: Números	**Bloque 3: Medida**	**Bloque 4: Geometría**
-Operaciones con fracciones. -Porcentajes y proporcionalidad. -Proporcionalidad directa.	-Desarrollo de estrategias para medir figuras de manera exacta y aproximada. -Elección de la unidad más adecuada para la expresión de una medida. -Realización de mediciones. -Comparación de superficies de figuras planas por superposición, descomposición y medición. -Sumar y restar medidas de longitud, capacidad, masa, superficie y volumen.	-La situación en el plano y en el espacio. Posiciones relativas de rectas. -Descripción de posiciones y movimientos. -La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas. -Figuras planas: elementos, relaciones y clasificación. -Clasificación de triángulos atendiendo a sus lados y sus ángulos.

	-Estimación de longitudes, capacidades, masas, superficies y volúmenes de objetos y espacios conocidos -Elección de la unidad y de los instrumentos más adecuados para medir y expresar una medida. -Medida de ángulos.	-Identificación y denominación de polígonos atendiendo al número de lados. -Perímetro y área. -Poliedros. Elementos básicos: vértices, caras y aristas.

Además de esos contenidos, según ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, los contenidos que se da en primer curso de ESO y son necesarios para la introducción de la semejanza, serían:

1º y 2º de ESO		
Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	**Bloque 2: Números y Algebra**	**Bloque 3. Geometría**
-Planificación del proceso de resolución de problemas. -Estrategias y procedimientos para resolver problemas. -Reflexión de resultados. -Matematización y modelización. -Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas para el trabajo científico. -Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje.	-Fracciones equivalentes. Cálculos con porcentajes. -Aumentos y disminuciones porcentuales. -Razón y proporción. -Magnitudes directa e inversamente proporcionales. -Constante de proporcionalidad.	-Elementos básicos de la geometría del plano. -Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad. -Ángulos y sus relaciones. -Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales. -Clasificación de triángulos y cuadriláteros. Propiedades y relaciones. -Medida y cálculo de ángulos de figuras planas. -Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. -Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples. -Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. -Aplicaciones directas.

Por lo tanto, según el currículo, el alumnado debería tener los conocimientos previos suficientes para la comenzar con la enseñanza de la semejanza de figuras que vamos a realizar. Pero debemos tener en cuenta un factor importante y es que puede que no hayan dado todo lo que hemos visto en el currículo, pues como sabemos, la geometría y la estadística son dos bloques que se dejan para el final en las programaciones y hay veces que no se llega a ellos. También deberemos considerar la posibilidad de que algunos alumnos ofrezcan algún tipo de obstáculo epistemológico por el tipo de enseñanza que hayan recibido en la cual alguna concepción pueda haber sido distorsionada.

3.- ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

Aunque los alumnos se supone que ya poseen los conocimientos que hemos mencionado en el punto anterior, es conveniente realizar algunas actividades con dos intenciones finales: la primera, que el alumnado recuerde los conocimientos aprendidos, y por otro lado, que el docente pueda detectar si hay algún tipo de carencia en los conceptos que deberían tener los alumnos y alumnas, así poder actuar y poner solución a estas carencias básicas.

Estas actividades van a consistir en una serie de ejercicios que el alumnado hará por parejas, con la finalidad de que entre los dos miembros de cada pareja puedan ayudarse entre sí a recordar lo que ya deberían saber. Cuando acaben, los alumnos y alumnas irán saliendo a la pizarra para resolverlos y los comentaremos entre todos. De esta manera, los alumnos y alumnas podrán recordar y el docente podrá evaluar el nivel y poder repasar las lagunas conceptuales que haya encontrado.

Ejercicio 1

Dibuja un triángulo de cada tipo y describe la característica que los define:

- Rectángulo
- Acutángulo
- Obtusángulo
- Isósceles
- Equilátero
- Escaleno

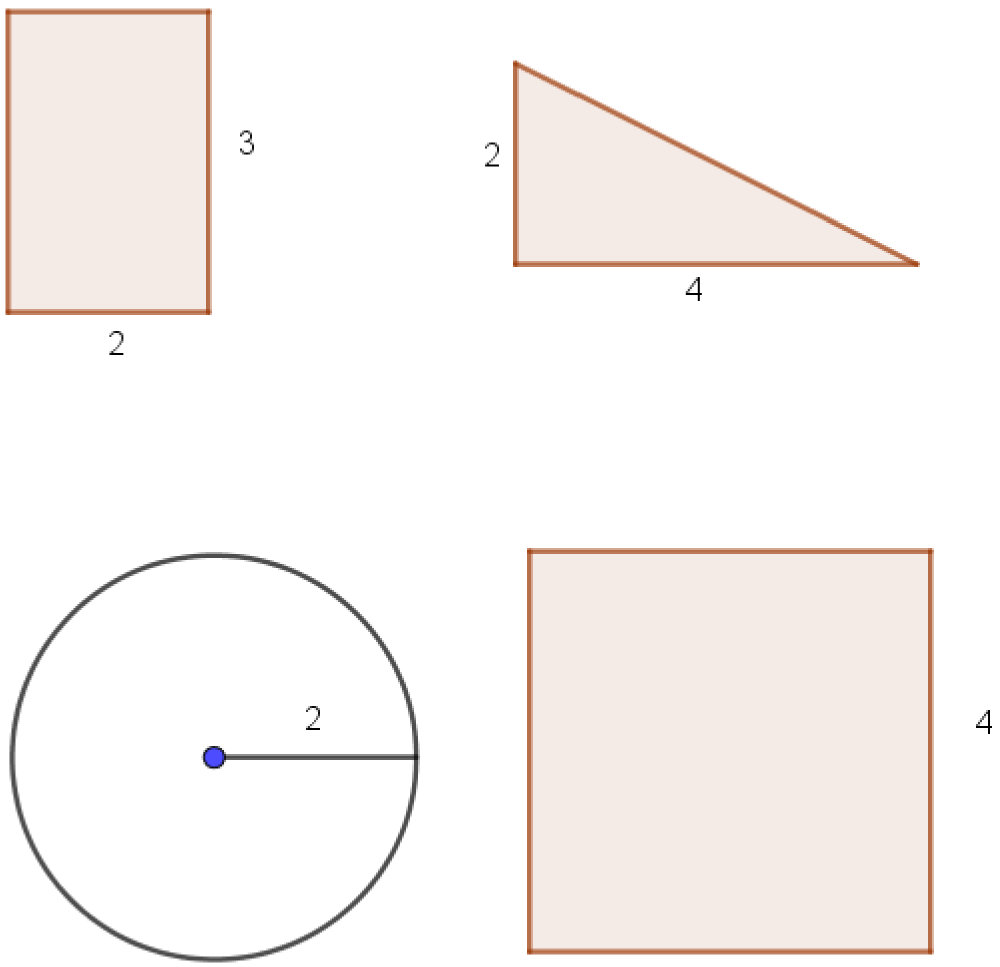
Ejercicio 2

Convierte las siguientes medidas a las unidades que se indican:

1. 700 cm = ______ m
2. 1,253 km = ______ m
3. 23 dm = ______ cm
4. 12 km^2 = ______ m^2
5. 24347200 dm^2 = _____ km^2
6. 0,25 m^2 = ______ mm^2

Ejercicio 3

Calcula las áreas de las siguientes figuras:



Ejercicio 4

Calcula la incógnita de las siguientes proporciones:

1. $\frac{3}{4} = \frac{x}{8}$
2. $\frac{2}{x} = \frac{4}{14}$
3. $\frac{5}{6} = \frac{15}{x}$
4. $\frac{x}{3} = \frac{15}{9}$

Ejercicio 5

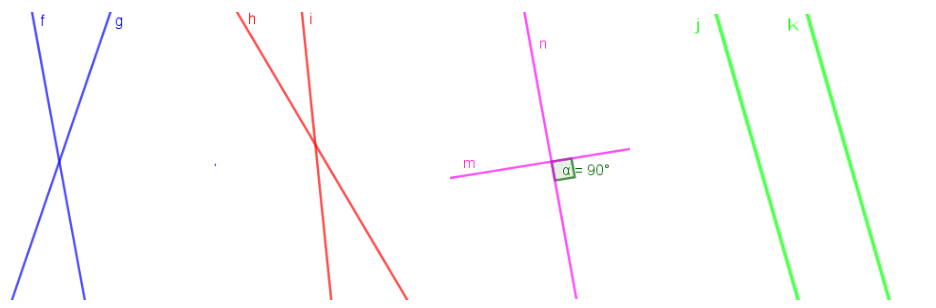
Identifica la proporción que no es equivalente a las otras dos:

$\frac{2}{3}$ $\frac{6}{9}$ $\frac{4}{6}$	$\frac{3}{5}$ $\frac{5}{25}$ $\frac{9}{15}$
$\frac{7}{6}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{14}{12}$	$\frac{3}{4}$ $\frac{6}{3}$ 2

Ejercicio 6

Indica la posición relativa de cada par de rectas que se muestran. ¿En que se diferencian las rectas secantes y las rectas perpendiculares?

a) b) c) d)



La finalidad del ejercicio 1 es que recuerden las propiedades y características de los distintos tipos de triángulos, necesarias para afrontar los distintos tipos de problemas que irán surgiendo.

Con el ejercicio 2 se pretende que el alumnado recuerde el cambio entre las distintas unidades del sistema métrico internacional, puesto que es necesario que tengan un cierto dominio del cambio de unidades principalmente para problemas de escalas.

El ejercicio 3 tiene la finalidad de que se recuerde cómo se calculaba el área de distintas figuras planas pues será necesario para resolver algunos problemas de semejanza.

Con el ejercicio 4 se pretende que recuerden operaciones aritméticas y algebraicas básicas para la resolución de los problemas que aparecerán durante toda la unidad.

El ejercicio 5 se propone para que el alumnado recuerde las técnicas aprendidas para comprobar si dos proporciones son equivalentes, pues es fundamental para resolver los problemas de semejanza.

Por último, el ejercicio 6 tiene la finalidad de que recuerden la posición relativa entre dos rectas, concepto necesario para la introducción del teorema de Thales.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático

1.- ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

Las razones de ser del objeto matemático de la semejanza que vamos a presentar en el aula van a ser la necesidad de representar la realidad a través de planos y mapas, y la resolución de problemas donde necesitamos medir distancias y longitudes de objetos a los que no podemos acceder.

Por tanto, la razón de ser histórica del teorema de Thales coincide con la razón de ser que se propone en el aula ya que, el campo de problemas que vamos a proponer va a consistir en calcular medidas de objetos inaccesibles e imposibles de calcular mediante medida directa.

2.- ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Como ocurre con la mayoría de objetos matemáticos, el concepto de semejanza ha sufrido una evolución a lo largo del tiempo, desde su origen ligado a problemas relacionados con la naturaleza pasando después a ser analizados desde el punto de vista de la ciencia.

Este uso inicial de la semejanza está bastante relacionado con la razón de ser que hemos propuesto en este trabajo, dado que se obtienen medidas de una figura, a partir de figuras semejantes más pequeñas.

Respecto al origen histórico del concepto de semejanza, según escribió Boyer (2001), los babilonios ya trabajan el concepto de semejanza entre figuras. Los egipcios debido a que necesitaban medir constantemente sus tierras debido a que las inundaciones del Nilo borraban continuamente sus fronteras, se centraron en el cálculo de áreas y volúmenes, para lo cual usaron rudimentos de trigonometría y nociones básicas de semejanza de triángulos.

En el museo de Bagdad se conserva la tablilla de Tell Harmal, datada de comienzos del segundo milenio antes de Cristo, en la que está dibujado un triángulo rectángulo, subdivido en cuatro triángulos rectángulos menores, donde se un tipo de fórmula de semejanza que viene a ser equivalente a nuestro teorema que dice que las áreas de figuras semejantes son entre sí como los cuadrados de lados correspondientes.

Alrededor del año 624 a.C. nació Thales de Mileto, conocido como el primer matemático verdadero de la geometría deductiva, fundador de la Escuela Filosófica Jónica, y uno de los Siete Sabios de Grecia. Son famosos dos teoremas suyos, que demuestra la semejanza entre dos triángulos:

- *"Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes (sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados son proporcionales entre sí)."*
- *"Sea B un punto de la circunferencia de diámetro AC, distinto de A y de C. El triángulo ABC resulta ser un triángulo rectángulo."*

Es famosa la leyenda que dice que Thales midió la altura de la pirámide de Keops en Egipto observando las longitudes de sus sombras en el momento en que la sombra proyectada por un palo vertical era exactamente igual a su altura y también que calculó la distancia de un barco a la playa por medio de la proporcionalidad de los lados de triángulos semejantes.

El método que utilizó Thales de Mileto para calcular la altura de la Pirámide de Keops es lo que hoy conocemos como **Teorema de Thales.**

Euclides escribió un tratado de matemáticas llamado "**Los Elementos**" hacia el año 300 a.C. Este tratado está dividido en trece libros y capítulos, de los cuales los seis primeros son de geometría elemental. En el **Libro VI** se define, formalmente y por primera vez, el concepto de semejanza y se proponen problemas o construcciones que involucran la semejanza entre figuras rectilíneas.

Más allá de su aparición, es importante saber la evolución histórica que ha tenido la semejanza y los posibles obstáculos epistemológicos durante este desarrollo histórico. En este sentido, en la obra de Escudero (2005) viene reflejada dicha evolución, siguiendo el trabajo de Lemonidis (1991), distingue tres grandes periodos de evolución histórica:

a) ***El griego.*** *La primera demostración del teorema de Thales y algunos teoremas relativos a figuras semejantes se encuentra en los Elementos de Euclides (s. IV a.C.). Hay que destacar de este periodo y, en general, en el periodo de la influencia de la geometría de Euclides, que las transformaciones no existen como tales.*

b) ***Del siglo XVI al XVIII.*** *Los problemas de la representación del espacio que surgen en el Renacimiento van a ser el germen para el estudio de las transformaciones. Durante estos siglos, se van a ir desarrollando lentamente, sin que se pueda identificar aún una etapa de utilización consciente y de conceptualización de las mismas. De este periodo, se resalta la consideración de una transformación como un útil en la resolución de problemas.*

c) ***Siglos XIX y XX.*** *Periodo de la estructuración y algebraización de la geometría. En el siglo XIX se produce la consideración de la homotecia y de la semejanza como objetos matemáticos, debido en gran parte al desarrollo que experimenta la geometría, entre las fechas de publicación de la geometría descriptiva de Monge (año 1799) y el Programa Erlangen de Felix Klein (año 1872) y a la evolución del campo numérico.*

Vamos a destacar este segundo periodo, pues gran parte de la razón de ser del objeto la vamos a centrar en el uso de la escala.

Es importante lo que Lemonidis (1991) señala como "transformación *geométrica vista como útil*" cuando identifica tres momentos distintos en el concepto de semejanza desde los que se pueden determinar tres aproximaciones a ella y que consideramos que deben tenerse presentes cuando se la considera como objeto de enseñanza:

a) ***Relación intrafigural.*** *Se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, estando ausente la idea de transformar una figura en otra.*

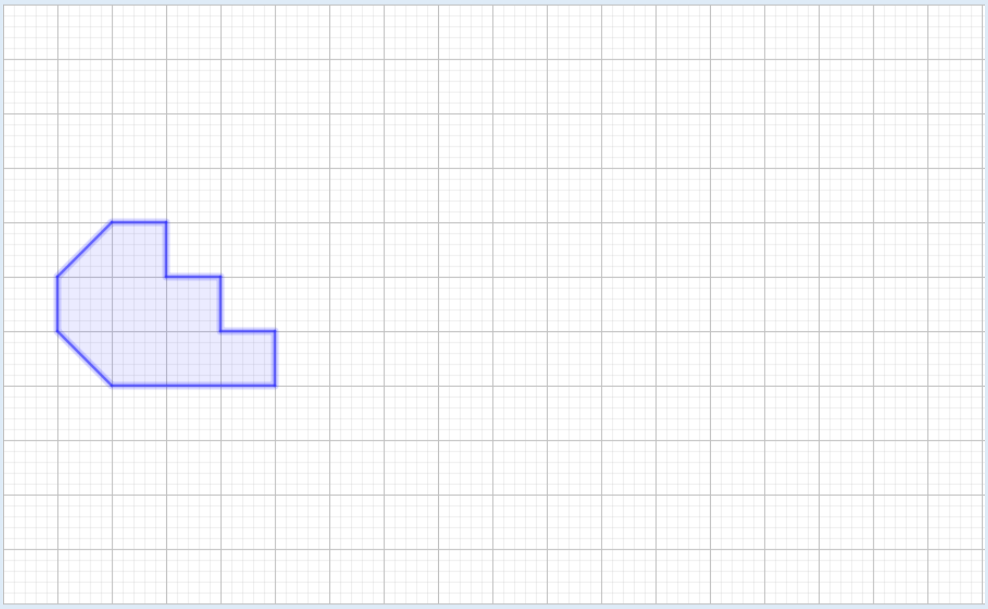
b***) Transformación geométrica vista como útil.*** *La transformación geométrica se percibe como una aplicación del conjunto de los puntos del plano en él mismo. Se utiliza la semejanza como un útil en la resolución de problemas gráficos.*

c) ***Transformación geométrica como objeto matemático****. Caracterizada porque hay un tratamiento en el que se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones.*

3.- Diseña uno o varios problemas que se constituyan como razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

Problema 1: Semejanza de figuras.

A partir de la siguiente figura, representa otra igual pero que sea el doble de grande. Posteriormente, explica brevemente el proceso que has seguido para su construcción.



En este problema, el enunciado es ambiguo ya que la frase "el doble de grande" puede tener diferentes interpretaciones**. Se persigue el objetivo de crear y enriquecer un debate abierto en clase para que los alumnos y alumnas puedan manifestar lo que han entendido del enunciado del problema y cómo lo han afrontado**. De esta forma, habrá una parte de los alumnos que habrán dibujado una figura similar a la original, pero de longitudes de cada uno de los lados el doble de las originales y puede que otros alumnos hayan interpretado que el doble de grande se refería a la superficie y hayan dibujado los lados con en una proporción $\sqrt{2}$ con respecto a los originales. El uso de la cuadrícula facilitará la construcción de la nueva figura.

Tras el debate abierto, se introducirá la razón de semejanza entre figuras, que coincidirá con la razón de semejanza entre perímetros. También se introducirá razonadamente la razón de semejanza entre áreas, que coincide con el cuadrado de la razón entre perímetros.

<u>Problema 2: Escalas.</u>

Los padres de Luis, cansados de pasar largo tiempo buscando sitio para aparcar el coche cuando vienen del pueblo los domingos por la noche, han decidido comprar una plaza de garaje. Han encontrado tres plazas que tienen el mismo precio, y tienen los planos de ellas, pero no saben por cual decidirse. ¿Podrías ayudarles a decidirse ordenándolas de mayor a menor tamaño?

Estos son los datos:

	Escala plano	Dimensiones plano	Área real plaza
Plaza #1	1:50	Largo: 8 cm Ancho: 4 cm	
Plaza #2	1:100	Largo: 5 cm Ancho: 2 cm	
Plaza #3	1:200	Largo: 3 cm Ancho: 1,5 cm	

La razón de ser de este problema es que haga surgir **la necesidad por parte del estudiante de aprender a utilizar las escalas para interpretar planos, tan útiles y utilizados en la vida cotidiana**.

<u>Problema 3: Medición de distancias inalcanzables.</u>

Pedro ha ido a pasar el día a la Expo con sus amigos. En cierto momento del día, alguien del grupo pregunta si alguien conoce la altura que tiene la torre del Agua. Pedro pide que le den 5 minutos y será capaz de decir al resto del grupo la altura de la torre. Coge una cinta métrica y apunta que la sombra de la torre se proyecta 15,2 metros. Posteriormente, y sabiendo que su amiga Ana mide 1,5 metros de altura, observa que proyecta una sombra de 30 cm. Anota todos estos datos en su libreta y sorprende a sus amigos indicándoles la altura que tiene la Torre del Agua. ¿Podrías indicar que cálculos ha realizado Pedro? ¿Qué altura de la torre ha obtenido?

La razón de ser de este problema es que el alumno reconozca la utilidad de **conocer el teorema de Thales para satisfacer curiosidades que le pudieran surgir en el día a día referidas a medidas de edificios, monumentos, puentes, etc**. En este caso, el problema razón de ser coincide con el problema que históricamente generó el estudio de la semejanza.

4.- Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La metodología de los problemas de razón de ser que hemos propuesto será diseñada conforme a lo estudiado en la asignatura de "**Fundamentos de didáctica de las matemáticas**" y consistirá en lo siguiente:

1. **Fase de estudio:** Seguiremos un modelo de aprendizaje basado en la resolución de problemas. Propondremos los problemas que constituyen la razón de ser la semejanza y hemos planteado en el apartado anterior, para conseguir que los alumnos, trabajando en grupos de dos o tres personas, construyan el saber matemático a enseñar. En esta fase, la labor del profesor será de observación activa del trabajo del alumnado, intentando no ayudar a los alumnos para que ellos trabajen solos. Aunque, si se observa que alguno de ellos está atascado o no tiene la seguridad para avanzar con el ejercicio, se podrá guiar o dar alguna pauta que le permita avanzar. Posteriormente se plantearán otros problemas que pondrán de manifiesto nuevos aspectos de la semejanza, así como las técnicas que resuelven los problemas, la reflexión sobre las tecnologías que las justifican y las soluciones encontradas.

   Dentro de esta fase podemos diferenciar los siguientes momentos:

   - **Primer encuentro:** Se proponen los problemas que los alumnos con los conocimientos que tienen pueden entender y que les llevan hacia la construcción de los objetos matemáticos que se quieren ensenar (en este caso la semejanza).
   - **Momento exploratorio**: Los estudiantes abordaran los problemas intentando encontrar pautas y estrategias para su resolución.
   - **Momento de constitución del entorno tecnológico-teórico**: Se reflexiona sobre el procedimiento realizado para resolver los problemas de semejanza y Thales y su solución.
   - **Momento de trabajo de la técnica**. Se practica y se mejora la técnica aprendida con la realización de ejercicios que requieran de esa técnica para su resolución.

2. **Fase de Formalización.** El objetivo de esta fase es dar una explicación teórica que formalice y justifique el objeto matemático que se ha estudiado. También reflexionar sobre su utilidad y evaluar los diferentes aspectos de su aplicación y sus limitaciones si fuera necesario.

Esta fase tiene dos momentos:

- **Momento de institucionalización**. Es el momento en que una técnica que ha demostrado ser útil y la tecnología que la justifica se formaliza para que puedan ser citadas explícitamente cuando sea necesario.
- **Momento de evaluación**. Se produce cuando hay que determinar el alcance y las limitaciones de una cierta técnica. Se reflexiona sobre la utilidad de lo aprendido sobre la semejanza entre figuras geométricas y sobre la importancia de conservar este conocimiento para aplicaciones futuras.

E. Campo de problemas, técnicas y tecnologías

En este apartado vamos a presentar el campo de problemas que se contienen en la unidad didáctica que presentamos, y asociaremos a cada campo de problemas las técnicas necesarias para la resolución de éstos, y las tecnologías que justifican dichas técnicas.

Los campos de problemas que proponemos son los siguientes:

C1: Figuras semejantes y propiedades.

C2: Razón de semejanza en longitudes y áreas.

C3: Escalas y aplicaciones.

C4: Teorema de Thales.

C5: División de segmentos.

C6: Distancias inaccesibles.

También, en este mismo apartado describiremos la metodología que utilizaremos para introducir los distintos campos de problemas, y cómo justificaremos las distintas técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático, basándonos en los conocimientos adquiridos en la asignatura de *Diseño, organización y desarrollo de actividades para el aprendizaje de Matemáticas* cursada en este máster.

E1. Campo de problemas 1: Figuras semejantes y propiedades.

El primer campo de problemas se centrará en la semejanza entre figuras y las propiedades de la semejanza.

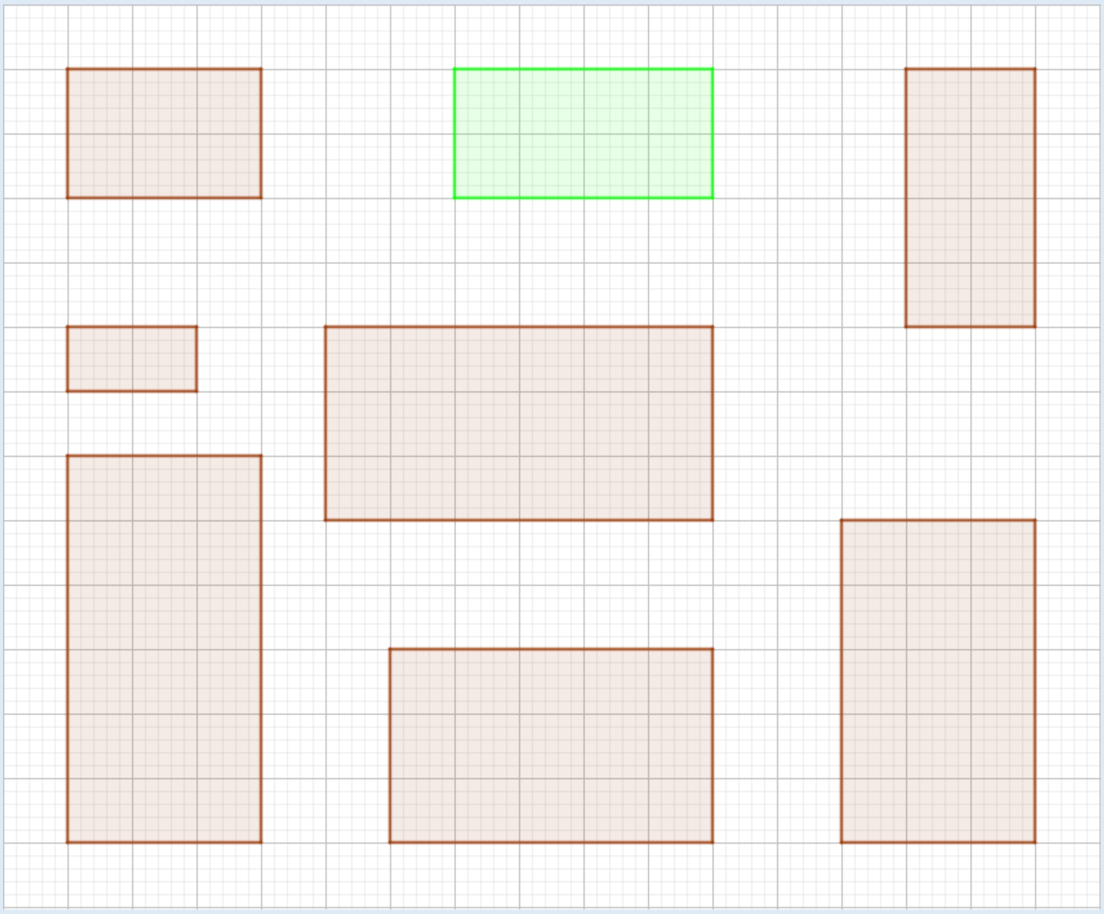
Nuestros objetivos para este campo de problemas van a ser los siguientes:

A. Intentaremos que los alumnos asocien el concepto de “semejanza” a “tener la misma forma”, y que sean capaces de ver las características que se deben de dar en la comparación de dos figuras para afirmar que ambas son semejantes.
B. Que entre toda la clase hallemos las propiedades que caracterizan a dos polígonos semejantes.
C. Institucionalizar los tres criterios por los que podemos afirmar que dos triángulos son semejantes.

Se entregará a los alumnos el siguiente problema, para que lo hagan de forma individual:

Problema 1.1

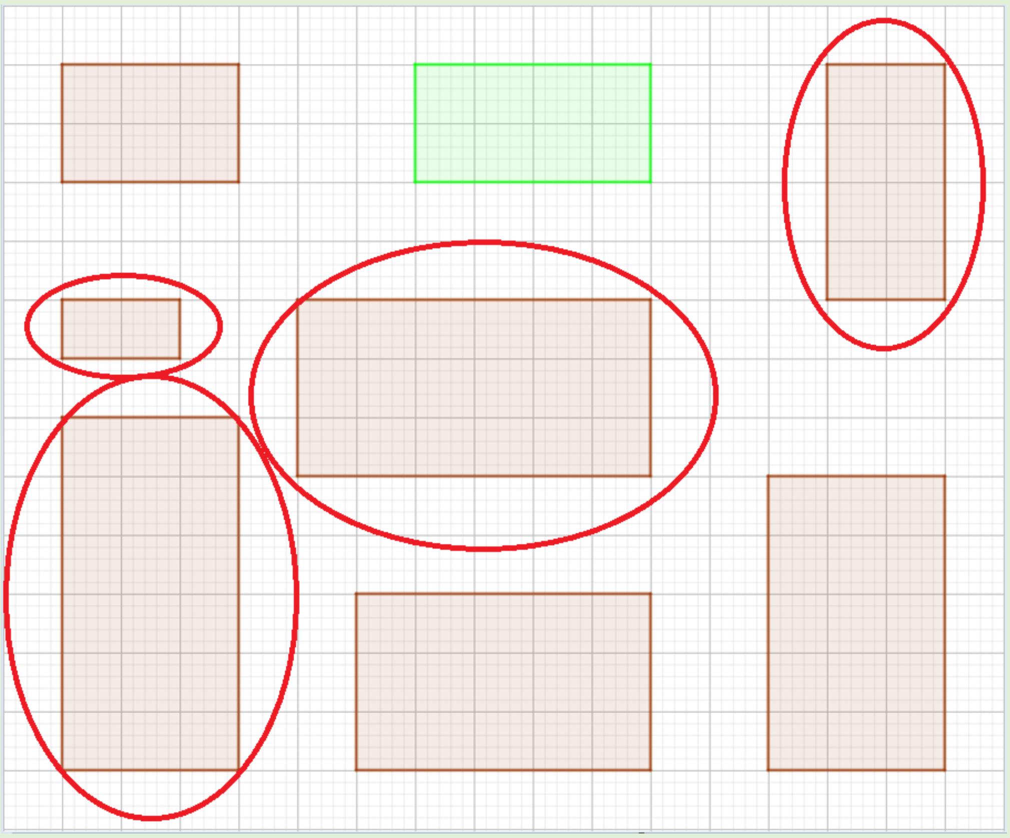
Identifica los rectángulos que tengan la misma forma que el rectángulo verde.



Tras dejarles pensar el ejercicio durante aproximadamente 10 minutos, y resolviendo todas las dudas que les pudieran surgir durante la realización del mismo, los propios estudiantes dirán en voz alta qué rectángulos han elegido y los motivos para hacerlo. Tras el debate que se producirá, el profesor explicará que tener la misma forma implica una serie de características como mantener la proporción entre cada uno de los de las figuras que se están comparando. Entonces surgirán los objetos de *semejanza* y *razón de semejanza*. El profesor institucionalizará estos dos conceptos.

La solución al ejercicio es la siguiente:

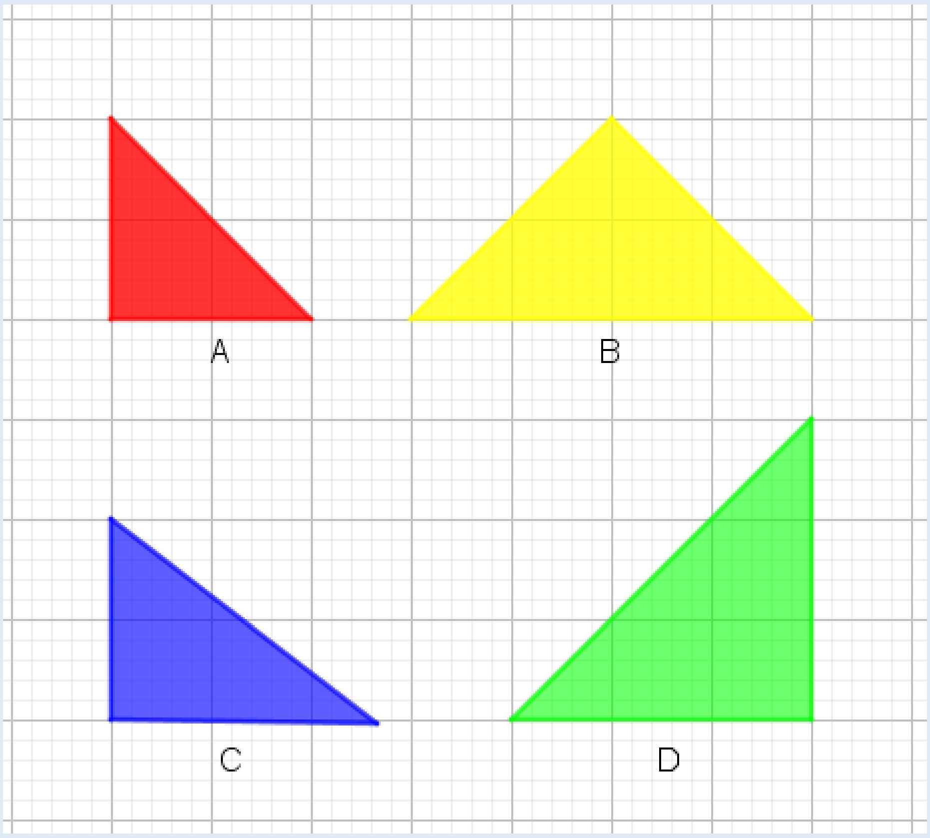
Las figuras semejantes al rectángulo verde son los marcados, que cumplen que los lados son proporcionales a los lados del rectángulo al cual son semejantes.



Entonces, y una vez que se han dado a conocerse los conceptos de semejanza y razón de semejanza, se les entregará el siguiente problema:

Problema 1.2

Identifica las figuras semejantes entre sí y calcula su razón de semejanza.



Con este problema, podrán darse cuenta que dos figuras pueden ser semejantes sólo con mantener la misma forma, y no hace falta que se encuentren orientadas en la misma posición.

La solución al problema es:

Los triángulos A y B son semejantes con una razón de semejanza igual a $\sqrt{2}$.

Los triángulos A y D son también semejantes y su razón de semejanza es 3/2.

El triángulo C no es semejante a ninguno de los anteriores.

El siguiente ejercicio tiene la finalidad de que afiancen los conceptos de semejanza y razón de semejanza, y le den una aplicación más analítica.

Problema 1.3

Las dimensiones de un rectángulo son 2 cm y 3 cm. Indica cuales de los siguientes rectángulos son semejantes a él y su razón de semejanza en caso de serlo:

a) *12 cm y 19 cm*
b) *40 cm y 60 cm*
c) *18 cm y 30 cm*
d) *24 cm y 36 cm*

El objetivo es que asocien la idea de semejanza a proporcionalidad, por lo que el interés de este ejercicio no es realizar cálculos complicados, por tanto, las soluciones son números enteros muy sencillos para que se centren en el concepto, no en las operaciones.

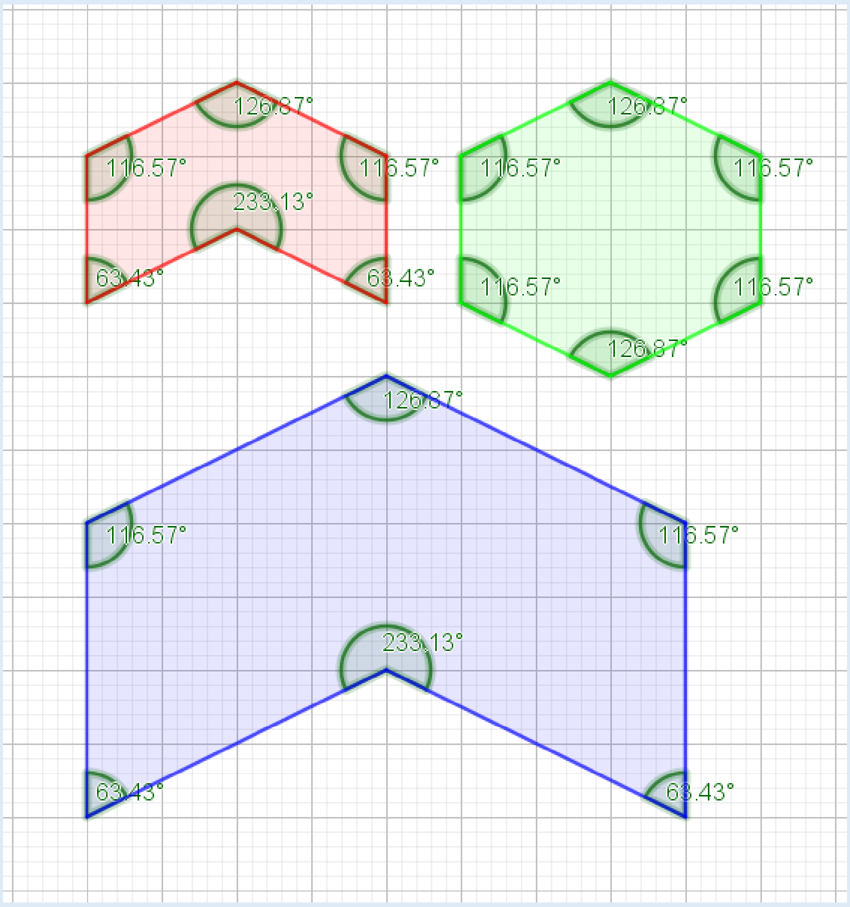
La solución a dicho problema es:

Los rectángulos de las opciones a) y c) no son semejantes al rectángulo dado.

En cambio, la opción b) es un rectángulo semejante con razón de semejanza 20, al igual que la opción d) cuya razón de semejanza es 12.

Problema 1.4

Observa las tres figuras, indica cuales de ellas son semejantes o no lo son argumentando tu respuesta.



En este problema esperamos que los alumnos, basándose en que dos figuras semejantes tienen la misma forma, se den cuenta de que la segunda, pese a mantener la misma medida de los lados que la primera, no es semejante a ella porque no se mantienen los ángulos. Aprovechando este hecho, el profesor institucionalizará la definición de polígonos semejantes, donde a parte de la razón entre lados, se deben mantener los ángulos entre estos.

La solución al ejercicio es:

Las figuras 1 y 2 no tienen la misma forma, por lo tanto no son semejantes. Eso se debe a que no se conservan los ángulos, por lo que para que dos figuras sean semejantes, aparte de mantener sus lados proporcionales, los ángulos se deben conservar.

Las figuras 1 y 3, sí que son semejantes, pues sus lados son proporcionales y se mantienen los ángulos entre lados.

Problema 1.5

Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) *Todos los cuadrados son semejantes.*
b) *Todos los triángulos equiláteros son semejantes.*
c) *Todos los rectángulos son semejantes.*
d) *Todos los pentágonos regulares son semejantes.*

Se espera que con este ejercicio mediten sobre la semejanza entre figuras y a través de la reflexión concluyan que todas las figuras, independientemente del número de lados que tenga, si todos los lados son iguales y los ángulos que forman entre ellos también lo son, entonces independientemente del tamaño de las figuras, serán semejantes entre ellas.

La solución al ejercicio es la siguiente:

a) **Verdadera**. Todos los cuadrados son semejantes ya que los ángulos entre los lados de los cuadrados son siempre rectos, y los lados de un mismo cuadrado son siempre de la misma longitud, por lo tanto, siempre se conservan ángulos y proporcionalidad entre lados entre cualesquiera sean dos cuadrados.
b) **Verdadera**. Todos los triángulos equiláteros son semejantes ya que se cumple que los ángulos entre lados son de 60º y además los lados tienen la misma longitud, así por el razonamiento anterior, son cualesquiera sean dos triángulos equiláteros serán semejantes.
c) **Falsa**. Dos rectángulos no tienen por qué ser semejantes pues, aunque conserven ángulos entre lados, no tiene por qué mantenerse la proporcionalidad entre lados. Por ejemplo, un rectángulo de lados 1 y 2 cm, no es semejante a otro de lados 1 y 3 cm.
d) **Verdadera**. Todos los pentágonos regulares son semejantes. El razonamiento es similar a los apartados a) y b), se mantienen ángulos y proporcionalidad entre los lados.

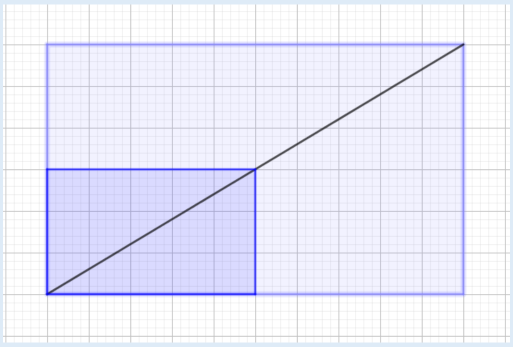
La siguiente actividad se realizará por parejas, con la ayuda de un ordenador y haciendo uso del programa GeoGebra.

Problema 1.6

Dibuja a través de la aplicación de GeoGebra un rectángulo cualquiera. Traza su diagonal desde su vértice inferior izquierdo al superior derecho.

Dibuja un rectángulo interior que coincida uno de sus vértices con el inferior izquierdo del rectángulo original y su vértice opuesto esté sobre la diagonal.

Por ejemplo:



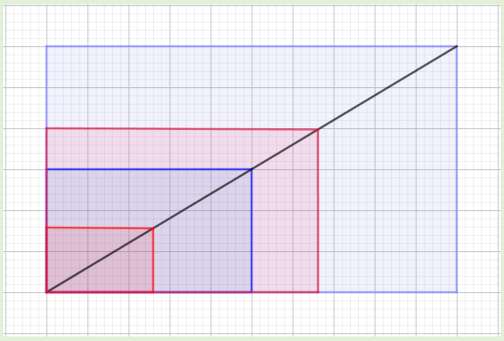
¿Qué relación encuentras entre el rectángulo interior y el exterior?

Dibuja dos rectángulos interiores más. ¿Qué conclusión obtienes relacionado con la semejanza entre rectángulos?

El objeto de la actividad es que los alumnos por sí mismos, sean capaces de deducir que una forma gráfica de comprobar que dos rectángulos semejantes, es introducir uno de ellos dentro del otro (haciendo coincidir uno de sus vértices) y desde ese vértice tirando la diagonal hacia el opuesto, entonces si son semejantes, esa diagonal siempre pasara por el vértice opuesto del rectángulo menor.

La solución a este problema es la siguiente:

La relación entre los rectángulos que mantienen dos vértices sobre la diagonal de otro más grande es que son semejantes, ya que por ser rectángulos sus ángulos son rectos, y además la relación entre sus lados se mantiene, por lo que la proporcionalidad entre los lados de cualesquiera sean los rectángulos con dos vértices sobre esa diagonal se mantendrá.



Otro problema clásico que se les va a proponer es el del rectángulo de razón $\sqrt{2}$, y como ejemplo de este rectángulo, el formado DIN A. La propiedad característica de este rectángulo es que si lo doblamos por la mitad sobre el lado largo volvemos a obtener otro rectángulo semejante al anterior, pero de área la mitad.

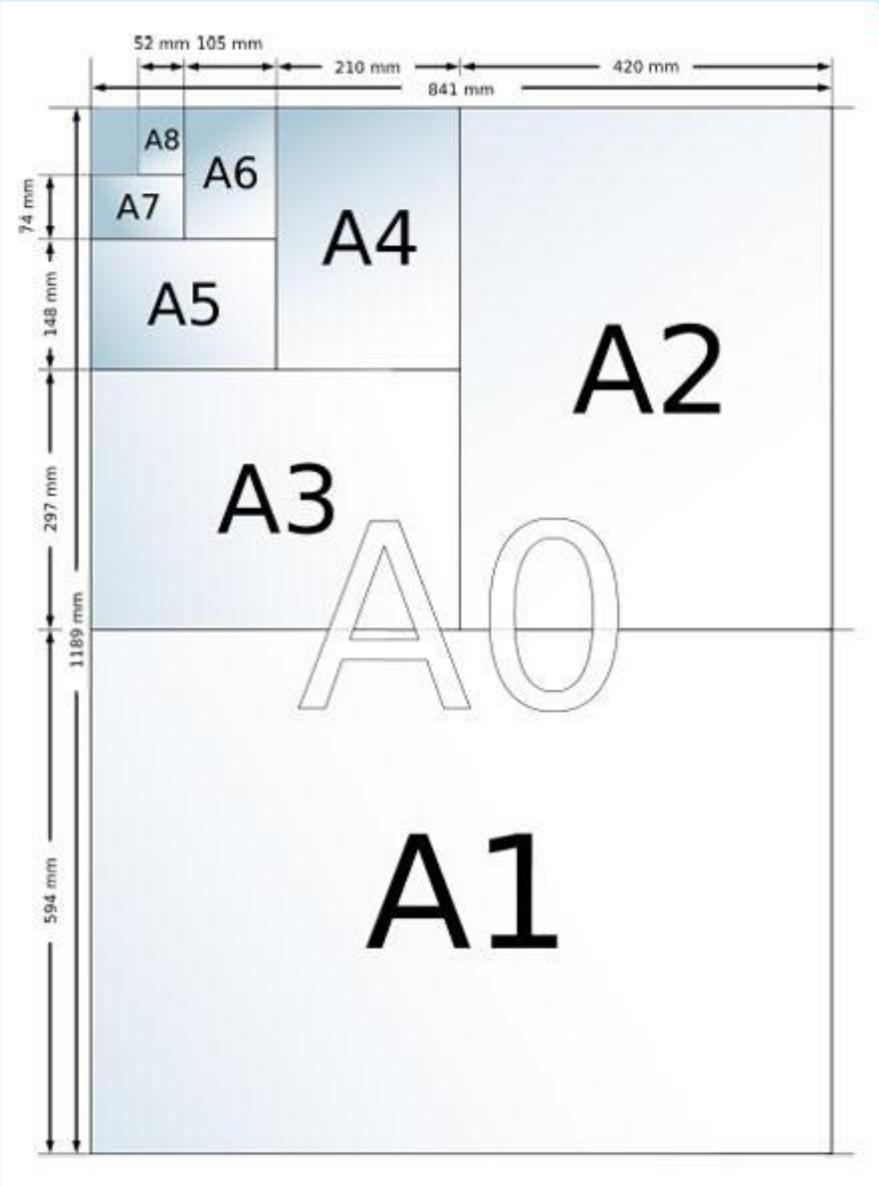
Se introduce este problema porque el formato DIN A es un formato que está continuamente ligado a la vida cotidiana del estudiante, es fácil de contextualizar, y además produce curiosidad en los alumnos.

Se les aconsejará que tomen un DIN A4, y lo doblen para obtener un A5, y lo vuelvan a doblar para obtener un A6, para que puedan comparar de una manera tangible que las superficies se reducen a la mitad con cada doble, pero no la longitud de los lados del rectángulo.

Se estima que esta actividad nos llevará la mitad de una sesión, pero es importante realizarla.

Problema 1.7

A continuación, se muestran las medidas de los diferentes tamaños DIN A que se utilizan en reprografía.



a) ¿Cuál es la razón entre el lado mayor y el lado menor en todos los formatos?
b) ¿Cuál es la razón de semejanza entre el rectángulo A0 y el A1?
c) ¿Cuál es la razón de semejanza entre el A1 y A3? ¿Y entre el A1 y el A4?
d) Calcular el perímetro del A3, A4 y A5. ¿Existe alguna relación entre ellos?
e) Sabiendo que el formato A4 se obtiene doblando un A3, ¿qué relación hay entre las superficies?
f) Introduce en una tabla, la longitud, anchura, perímetro y área de todos los formatos DIN que aparecen en el dibujo.

La solución al problema es la siguiente:

a) La razón entre el lado mayor y el lado menor de todos los formatos es aproximadamente $\sqrt{2}$.
b) La razón de semejanza entre el rectángulo A0 y el A1 es 1,41.
c) La razón de semejanza entre A1 y A3 es aproximadamente 2.
La razón de semejanza entre A1 y A4 es aproximadamente $2\sqrt{2}$.
d) Perímetro de A3: 1434 mm
Perímetro de A4: 1014 mm
Perímetro de A5: 716 mm
La relación entre los perímetros es aproximadamente $\sqrt{2}$ entre cada paso de formato.
e) La superficie de A4 será la mitad de la A3.
f)

	A0	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**A8**
longitud	1189	841	594	420	297	210	148	105	74
anchura	841	594	420	297	210	148	105	74	52
perímetro	4060	2870	2028	1434	1014	716	506	358	252
área	999949	499554	268488	124740	62370	31080	15540	7770	3848

*Medidas lineales dadas en mm y áreas en mm^2

El siguiente problema servirá como introducción a la semejanza entre triángulos y justificará la posterior institucionalización de los criterios que nos permiten reconocer triángulos semejantes.

Problema 1.8

Dibuja con la ayuda de un transportador, un triángulo rectángulo y con uno de los ángulos de 30 grados. Mide la longitud de sus lados.

Ahora dibuja otro triángulo rectángulo con uno de sus ángulos restantes de 60 grados, mide sus lados.

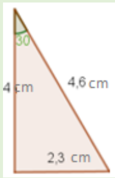
¿Cómo son los dos triángulos que has dibujado?

Si ahora dibujas otro que no sea rectángulo, ¿es semejante a los anteriores?

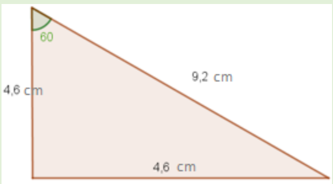
Al poner en común los resultados obtenidos por los alumnos, el profesor explicará los criterios que se utilizan para saber si dos triángulos son semejantes. Será pues un momento de institucionalización de los criterios de semejanza entre triángulos con sus respectivos ejemplos.

La solución al problema es la que a continuación se expone:

Dibujamos un triángulo cualquiera rectángulo con uno de sus ángulos de 30 grados:



Ahora dibujamos otro, con otro de sus ángulos de 60 grados:



Estos dos triángulos son semejantes, ya que todos sus lados son proporcionales y además de conservan ángulos entre los lados.

Si dibujamos otro triángulo que no sea rectángulo nunca podrá ser semejante a los anteriores.

El objetivo principal del siguiente problema es que los alumnos pongan en práctica las técnicas y teoría que han aprendido hasta el momento.

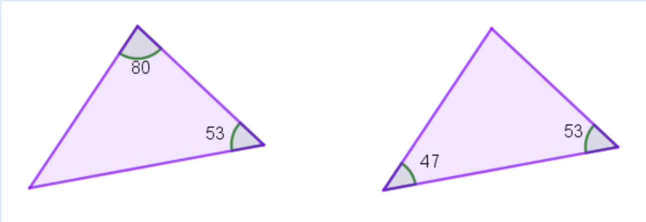
Problema 1.9

1.- Dadas las parejas de triángulos de lados a, b y c y a´, b´ y c´. Di son semejantes y su razón de semejanza en caso de serlos.

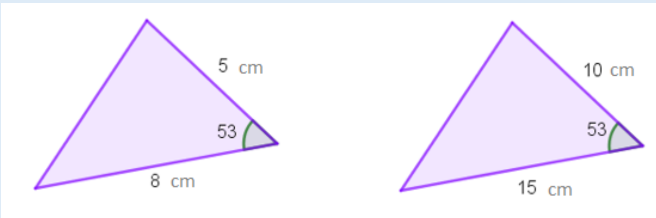
a) a=2 cm, b=3 cm, c=4 cm y a´=6 cm, b´=9 cm, c´=12 cm
b) a=4 cm, b=5 cm, c=7 cm y a´=6 cm, b´=8 cm, c´=11 cm

2.- ¿Son semejantes los siguientes triángulos?

a)



b)



La solución es la siguiente:

1.- a) Sí, son semejantes, con razón de semejanza 1/3.

b) No, no son semejantes ya que sus lados no son proporcionales entre sí:

$$\frac{4}{6} \neq \frac{5}{8} \neq \frac{7}{11}$$

2.- a) Sí, son semejantes ya que tiene sus ángulos iguales.

b) No, no son semejantes ya que dos de sus lados no son proporcionales:

$$\frac{5}{10} \neq \frac{8}{15}$$

Técnicas y tecnologías asociadas a este campo de problemas

Para comprobar si dos figuras geométricas planas son semejantes, se dispone de las siguientes **técnicas**:

- *Criterio de semejanza para figuras planas:*

  Dos figuras son semejantes si tienen los lados correspondientes proporcionales y los ángulos homólogos son iguales.

  Para comprobar si dos lados correspondientes son proporcionales, hacemos uso del concepto de "razón de semejanza".

  La técnica para calcular la razón de semejanza entre segmentos es un cociente entre las longitudes de dichos segmentos.

  Por ejemplo, dados dos triángulos ABC y A'B'C', estos son semejantes si se cumple:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = k$$

Siendo k la razón de semejanza.

Si el problema consiste en hallar un lado desconocido de dos polígonos semejantes, la técnica consiste en operar con fracciones, de tal manera que el lado buscado se deberá despejar de la igualdad entre los cocientes o que el resultado del cociente que contiene la incógnita sea igual a la razón de semejanza.

Recurriendo al ejemplo anterior, si queremos hallar uno de los lados para que los triángulos sean semejantes. Supongamos que el lado incógnita x es el segmento $\overline{AB}$. Entonces tenemos:

Operaciones algebraicas:

-Significado de incógnita.

-Despejar incógnita.

Operaciones aritméticas:

-Operaciones con fracciones.

Concepto de razón de semejanza:

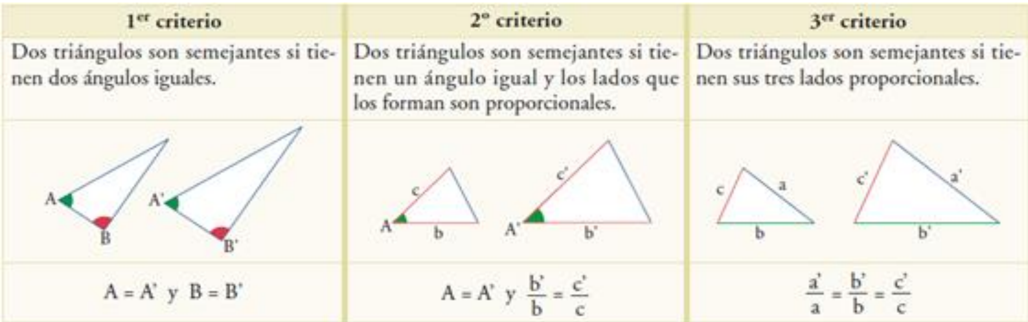
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = k \Rightarrow \frac{x}{\overline{A'B'}} = k \Rightarrow x = k * \overline{A'B'}$$

- *Criterios de semejanza de triángulos:*

  1º criterio: dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos correspondientes iguales.

  2º criterio: dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo correspondiente igual y los lados que lo forman proporcionales.

  3º criterio: dos triángulos son semejantes si tienen los tres lados son proporcionales.



1er criterio	2º criterio	3er criterio
Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.	Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que los forman son proporcionales.	Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados proporcionales.
$A = A'$ y $B = B'$	$A = A'$ y $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$	$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$

Las **tecnologías** que sustentan a dichas técnicas son:

- La definición de semejanza: se dice que dos figuras geométricas son semejantes si tienen la misma forma.
- La definición de razón de semejanza: cociente entre la longitud de un lado de una figura y la longitud del lado correspondiente a la otra figura.
- La definición de los conceptos como proporcionalidad, segmento, incógnita, fracción, etc.
- Las propiedades asociadas a operaciones tanto aritméticas como algebraicas: regla de signos, jerarquía de operaciones, etc.
- Las propiedades de ciertas figuras geométricas, como los triángulos, rectángulos, etc.

E2. Campo de problemas 2: Razón de semejanza en longitudes y áreas.

En este campo de problema vamos a tratar las relaciones de semejanza entre perímetros y áreas.

Los objetivos que nos marcamos con este campo de problemas van a ser:

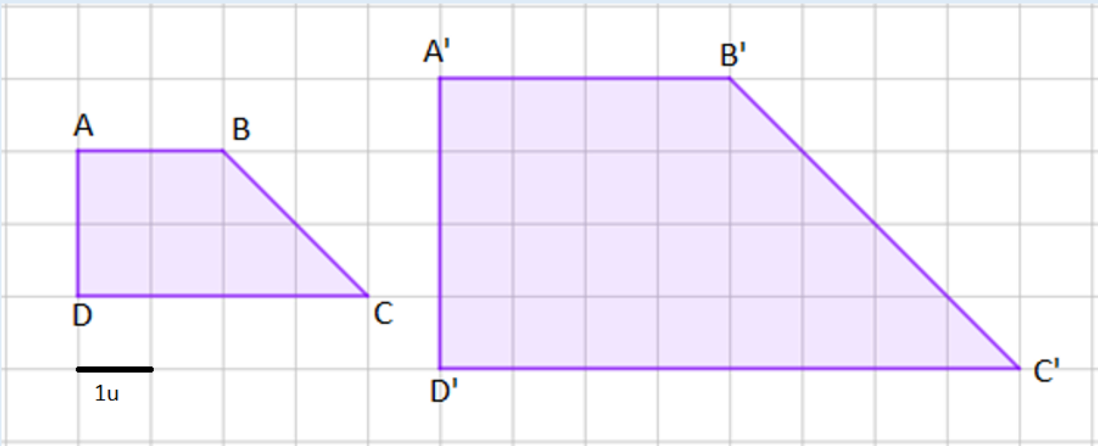
A. Saber relacionar las razones entre perímetros y áreas de figuras semejantes.
B. Establecer una correspondencia entre las razones de semejanza, entre los perímetros y entre las áreas de figuras semejantes.

Antes de comenzar con el nuevo campo de problemas, nos conviene hacer un repaso de cómo se calculan las áreas y perímetros de las principales figuras geométricas.

Propondremos el siguiente problema para que los alumnos lo realicen de forma individual:

Problema 2.1

Dados los siguientes polígonos semejantes:



a) *Calcula la medida de sus lados, perímetros y áreas.*
b) *Halla la razón de semejanza entre ellos, la razón entre sus perímetros y la razón entre sus áreas.*
c) *¿Qué relación hay entre la razón de semejanza y la de sus perímetros?*
d) *¿y entre la de semejanza y la de sus áreas?*

Dejaremos unos 10 minutos para que resuelvan el ejercicio, comentaremos los resultados entre toda la clase. Se abrirá una discusión cuando lleguemos al apartado d, pues algunos alumnos se darán cuenta de que la razón entre las áreas es el cuadrado de la relación de semejanza. Esto nos servirá para explicar que las medidas de carácter bidimensional como es el área, aumentan de una manera cuadrática.

Aprovecharemos las ideas que han aflorado durante el debate para institucionalizar el concepto de razón entre perímetros y que esta razón coincide con la razón de semejanza, y que la razón entre áreas de figuras semejantes coincide con el cuadrado de la razón de semejanza entre dichas figuras.

La solución del problema es la siguiente:

a) <u>Medidas de los lados</u>:
AB=2 u, BC=$\sqrt{4+4}$=$\sqrt{8}$ = $2\sqrt{2}$ u, CD=4 u, DA=2 u
A’B’=4 u, B’C’=$\sqrt{16+16}$ = $4\sqrt{2}$ u, C’D’=8 u, D’A’=4 u
<u>Medidas de los perímetros</u>:
P_{ABCD}= 8+$2\sqrt{2}$ u
$P_{A'B'C'D'}$= 16+$4\sqrt{2}$ u
<u>Medidas de las áreas</u>:
A_{ABCD}= 6 u^2
$A_{A'B'C'D'}$= 24 u^2

b) Razón de semejanza: $k = \frac{4}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{8}{4} = 2$
Razón entre perímetros: $\frac{16+4\sqrt{2}}{8+2\sqrt{2}} = 2$
Razón entre áreas: $\frac{24}{6} = 4$

c) La razón de semejanza coincide con la razón entre perímetros.

d) La razón entre áreas es el cuadrado de la razón de semejanza.

Tras la institucionalización, volveremos al problema 1.7 del campo de problemas anterior, para comprobar que se cumple que la razón entre las áreas de los diferentes DIN A, es el cuadrado de las razones de semejanza (teníamos calculada una tabla con las áreas de los diferentes formatos para cuando llegase este momento).

Les proponemos el siguiente problema:

Problema 2.2

Las medidas de un rectángulo son 4 y 6 centímetros. Calcula las medidas de otro rectángulo semejante al anterior y tal que su área mida 216 centímetros cuadrados.

¿Cuál es su razón de semejanza? ¿y su razón entre perímetros?

Para resolver este problema, de una manera implícita se debe calcular el área del rectángulo que nos dan y calcular la razón entre áreas. Deberán aplicar que la razón entre áreas es el cuadrado de la razón de semejanza para una vez que tengamos la razón de semejanza puedan calcular las medidas de los lados del rectángulo que nos piden.

Las dos preguntas que se hacen en el ejercicio, realmente no serían necesarias puesto que para la resolución del ejercicio se contestan implícitamente, pero se han preguntado con el propósito de guiar a los alumnos que tengan más dificultades para encontrar la solución del ejercicio.

Una solución del problema sería la siguiente:

El área del primer rectángulo es 4*6= 24 cm^2.

Así, la razón entre sus áreas es: $\frac{216}{24} = 9$

Como la razón entre las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza, y ésta coincide con la razón entre sus lados, entonces la razón entre sus lados es 3.

Por tanto, las medidas del rectángulo grande semejante al que nos daban son:

Lado 1= 4 cm * 3 = 12 cm

Lado 2 = 6 cm * 3 = 18 cm

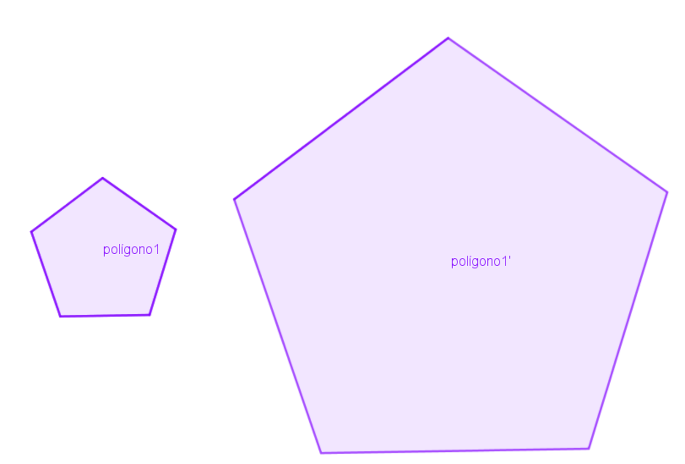
Se puede comprobar que con estos lados el rectángulo tiene el área que nos indicaban:

12*18=216 cm^2, que verifica que el resultado es correcto.

Para incidir en este tipo de ejercicios proponemos el siguiente:

Problema 2.3

Los siguientes pentágonos son semejantes con razón de semejanza igual a 3.



a) *Si el lado del polígono 1 mide 3 cm. ¿Cuánto mide el perímetro del polígono 2?*
b) *Si el área del polígono 1 es de 20 cm² ¿Cuánto mide el área del polígono 2?*

La finalidad del ejercicio es volver a recordar las relaciones entre las razones de semejanza, entre perímetros y entre áreas.

La solución al problema es la siguiente:

a) La razón entre perímetros coincide con la razón de semejanza que llamaremos k.
Si k=3, y el perímetro del polígono 1 es de 3cm * 5lados = 15cm,
entonces el perímetro del polígono 2 será de 15cm * k= 15 cm * 3 = 45 cm.
b) Como la razón entre áreas es el cuadrado de la razón de semejanza, si el área del polígono 1 es de 20 cm^2,
entonces el área del polígono 2 será 20 $cm^2 * k^2$ = 20 $cm^2 * 3^2$ = 180 cm^2

Finalmente, se propondrá un ejercicio opcional de ampliación, voluntario para los alumnos que lo quieran hacer, para ver la relación entre la razón entre volúmenes y la razón de semejanza.

Problema 2.4

Dados dos cubos, uno de 3 cm de lado y el otro de 30 cm de lado.

a) Calcula su razón de semejanza
b) Calcula su razón entre perímetros
c) Calcula la superficie de cada cubo y la razón entre sus áreas.
d) Calcula el volumen de cada cubo y la razón entre sus volúmenes.
e) ¿Qué relación hay entre la razón de semejanza, la razón entre áreas y la razón entre volúmenes?

Mediante la resolución de este ejercicio los alumnos se darán cuenta de que le volumen es una dimensión cúbica, y por tanto la razón entre volúmenes es la razón de semejanza al cubo.

La solución a este ejercicio es la siguiente:

a) Recordaremos que todos los cubos son semejantes, y que los lados de un cubo son todos iguales, por lo que basta que encontremos la razón de proporcionalidad de uno de sus lados para obtener la razón de semejanza. En este caso, la razón de semejanza es 30/3 =10 = k.
b) La razón entre perímetros coincide con la razón de semejanza, por tanto es 10.
c) El volumen el primer cubo es 3*3*3=27 cm^3
   El volumen del segundo cubo es 30*30*30=27000 cm^3
   Por tanto, la razón entre sus volúmenes es 27000/27=1000
d) Como ya conocíamos si la razón de semejanza es k, la razón entre áreas era k^2.
   Para este ejercicio en concreto, k=10. Por tanto, la razón entre áreas es 10^2=100
   Como hemos visto en el apartado anterior, la razón entre volúmenes es 1000, que precisamente es k^3, por lo que podemos concluir con que la razón entre volúmenes es el cubo de la razón de semejanza.

Técnicas y tecnologías asociadas a este campo de problemas

Además de las técnicas que vimos en el campo de problemas anterior, podemos añadir las siguientes **técnicas** necesarias para este campo de problemas:

- La proporción formada por el cociente de los perímetros, áreas y volúmenes de dos cuerpos semejantes.
- La relación que existe entre la razón de semejanza, la razón de perímetros, la razón de áreas y la razón de volúmenes.

Las **tecnologías** que sustentan dichas técnicas son:

- La definición de la **razón de semejanza**: cociente entre la longitud de un lado de una figura y la longitud del lado correspondiente a la otra figura.
- La definición de la **razón de perímetros/ longitudes**: Cociente entre los perímetros de dos figuras geométricas. La razón entre los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón de semejanza.
- La definición de la **razón de áreas**: Cociente entre las áreas de dos figuras geométricas. La razón entre las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de su razón de semejanza.
- La definición de la **razón de volúmenes**: Cociente entre los volúmenes de dos cuerpos geométricos. La razón entre los volúmenes de dos cuerpos semejantes es igual al cubo de su razón de semejanza.

E3. Campo de problemas 3: Escalas y aplicaciones.

Seguramente sea este campo de problemas uno de los más útiles en el día a día, puesto que es uno de los más utilizados en la vida cotidiana ya que continuamente estamos interpretando planos y mapas, ya sea para localizar alguna dirección o interpretar las medidas de algún objeto que no tenemos presencialmente.

Los objetivos que buscamos con este campo de problemas son:

A. Interpretar las escalas.
B. Calcular distancias y áreas a partir de mapas, maquetas y/o planos mediante la escala.
C. Representar a escala un objeto o espacio de la realidad.

Empezaremos este campo de problemas con el siguiente problema:

Problema 3.1

La escala de un mapa es 1:50.000.

a) *Relaciona esta escala con la razón de semejanza de lo representado y la realidad.*
b) *Si medimos en el mapa la distancia entre dos lugares y nos sale una medida de 10 cm, ¿cuál es la distancia entre esos dos lugares en la realidad?*
c) *Sabemos que la distancia entre dos ciudades en la realidad es de 40 km, ¿qué distancia habrá entre ellas en el plano?*

Este problema se realizará de forma individual, pero se corregirá en la pizarra. Aunque formalmente aún no saben lo que es la escala, algunos alumnos asemejaran la escala con la razón de semejanza y podrán realizar el ejercicio con los conocimientos que tienen hasta ese momento.

A la finalización del ejercicio, el profesor institucionalizará el concepto de escala como el cociente de la medida de la representación entre la medida en la realidad, lo que sería la razón de semejanza entre lo representado y la realidad.

Se les recordará lo importante que es expresar las medidas en las unidades correctas, y que la mayoría de planos y mapas requieren cambio de unidades, pues lo normal es medir en centímetros en el plano o mapa, pero esas medidas hay que transformarlas a metros o kilómetros en la vida real.

La solución al ejercicio es la siguiente:

a) La escala 1:50.000 significa que 50.000 cm de la realidad se representan en 1 cm, es decir, que el objeto representado es 50.000 mayor que su representación.
   Por tanto, la razón de semejanza es 1/50.000 que coincide con la escala.

b) Si en el mapa la distancia entre dos ciudades es de 10 cm, la distancia entre las dos ciudades en la realidad será 10 cm * 50.000 = 500.000 cm
   Haciendo un cambio de unidades a km:
   500.000 cm = 500.000/100.000 = 5 km

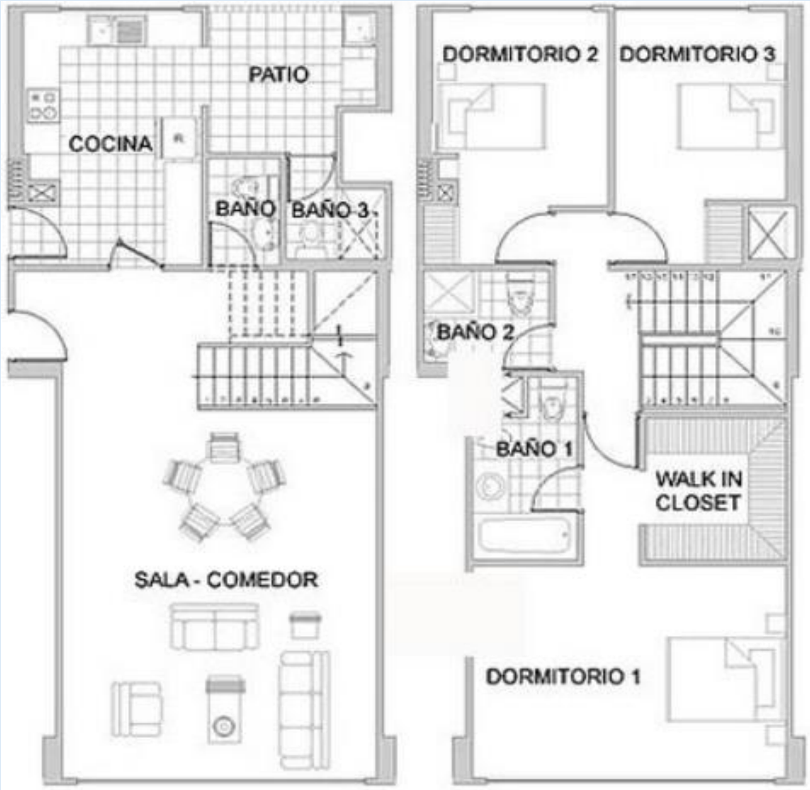
c) Si la distancia entre dos ciudades en la realidad es de 40 km, pasando esta medida a cm: 40 km = 4.000.000 cm,
   Y para calcular la distancia en el mapa dividimos por 50.000, por lo que nos queda:

$$\frac{4.000.000}{50.000} = 80\ cm$$

Otro problema que les vamos a plantear es el siguiente:

Problema 3.2

La escala del siguiente plano es 1:100.



Completa el siguiente cuadro:

	Medidas plano	*Medidas reales*	*Superficie real*
Cocina			
Dormitorio 1			
Baño 2			
Sala-comedor			

Cuya solución es la siguiente:

	Medidas plano	*Medidas reales*	*Superficie real*
Cocina	*2,3 cm * 3,2 cm*	*230 cm * 320 cm*	*7,36* m^2
Dormitorio 1	*4 cm * 2,7 cm*	*400 cm * 270 cm*	*10,8* m^2
Baño 2	*1,6 cm * 1,2 cm*	*160 cm * 120 cm*	*1,92* m^2
Sala-comedor	*4 cm * 4,6 cm*	*400 cm * 460 cm*	*18,4* m^2

Tras realizar este problema tan útil para la vida cotidiana, se les explicará que a veces lo que representamos en planos también pueden ser objetos muy pequeños, que la escala que utilizamos amplía en vez de reducir como en los mapas. Por ejemplo, muchas piezas de ingeniería se representan ampliadas en planos.

Existen tres tipos de escalas:

- Escala natural: el tamaño representado en el plano coincide con la realidad, es decir, *1:1*.
- Escala de reducción: el tamaño representado en el plano es menor que la realidad, es decir, *1:n* con n>1.
- Escala de ampliación: el tamaño representado en el plano es mayor que la realidad, es decir, *n:1* con n>1.

Para practicar que escalas utilizar para la representación de objetos proponemos el siguiente ejercicio:

Problema 3.3

¿Qué escalas utilizarías para representar los siguientes objetos en un folio?

a) La planta de un chalet
b) El engranaje de un reloj
c) La placa base de un móvil
d) La ciudad de Zaragoza
e) La tuerca de la rueda de un coche

La solución al problema es la siguiente:

a) Una escala usual para representar planos de edificios como un chalet sobre un folio podría ser de 1:100 a 1:150 dependiendo del tamaño de la planta.
b) Dependiendo del tamaño del engranaje, una escala aceptable sería entre 10:1 y 15:1.
c) La placa base de un móvil se podría representar con una escala 2:1.
d) La escala del plano de la ciudad de Zaragoza, para que nos cupiera en un folio tendría que ser entorno a 1:50.000.

Otros problemas que conviene que realicen para afianzar las técnicas aprendidas son los siguientes:

Problema 3.4

La distancia real entre dos ciudades es de 300 kilómetros y la distancia que hay entre ellas en el mapa es de 6 centímetros. Calcula la escala del mapa.

Cuya solución es la siguiente:

Lo primero es pasar de kilómetros a centímetros:

300 km = 30.000.000 cm

Si 6 cm representan 30.000.000 de cm, entonces la escala es:

6:30.000.000 = **1:5.000.000** que es una escala de reducción.

Otro problema:

Problema 3.5

Un engranaje de un reloj tiene un diámetro de 2mm, pero en el plano que tiene el relojero del despiece del reloj tiene un diámetro de 4 cm. Calcula la escala del plano del relojero.

Y su solución es:

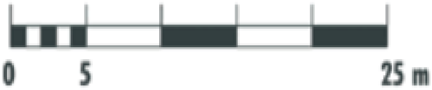
Lo primero es pasar los 4 centímetros a milímetros: 4 cm = 40 mm

Si 2 mm se representan con 40 mm, entonces la escala será:

40:2 = **20:1** que es una escala de ampliación.

El profesor explicará que además de la representación numérica de las escalas, existe otra forma de representarlas que es mediante un segmento dividido en varias partes, indicando en cada una de ellas la medida real representada por la parte de dicho segmento. Este tipo de escalas se llaman escalas gráficas.

Por ejemplo:



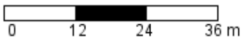
Representa que el primer segmento (de 0 a 5) representa 5 metros de la realidad, y el segmento completo representa una longitud de 25 metros en la realidad.

La ventaja de las escalas gráficas radica en que es independiente del tamaño de impresión, cosa que no ocurre con las escalas numéricas, donde si influye el tamaño de la impresión y puede dar lugar a errores.

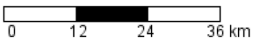
Con esta información podemos proponer el siguiente problema:

Problema 3.6

Relaciona las siguientes escalas gráficas con las numéricas:

1.- 

2.- 

3.- 

4.- 

a.- 1:500.000

b.- 1:500

c.- 1:1.200.000

d.- 1:1.200

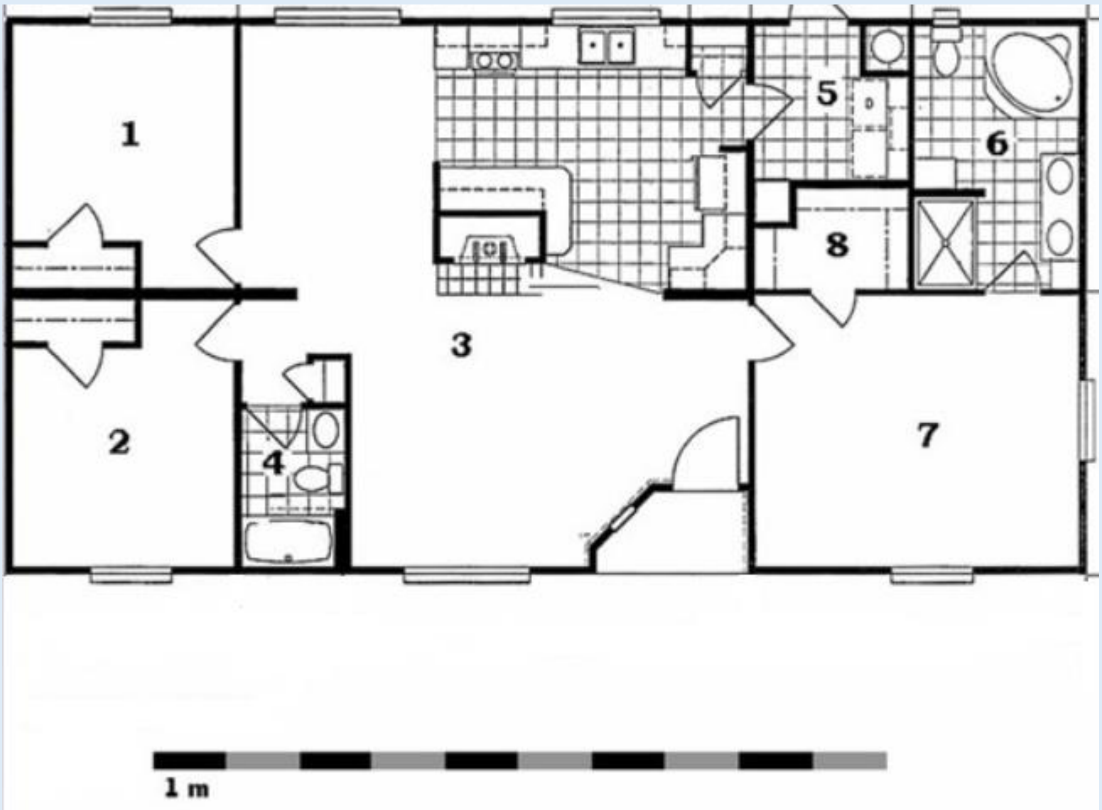
La solución al ejercicio es la siguiente:

1. En la **escala gráfica 1**, 1 cm equivale a 12 m, es decir, a 1.200 cm reales. Por tanto, la **escala gráfica 1** equivale a la **escala numérica d.**
2. En la **escala gráfica 2**, 1 cm equivale a 5 m, es decir, a 500 cm reales. Por tanto, la **escala gráfica 2** equivale a la **escala numérica b.**
3. En la **escala gráfica 3**, 1 cm equivale a 12 km, es decir, a 1.200.000 cm reales. Por tanto, la **escala gráfica 3** equivale a la **escala numérica c.**
4. En la **escala gráfica 4**, 1 cm equivale a 5 km, es decir, a 500.000 cm reales. Por tanto, la **escala gráfica 4** equivale a la **escala numérica a.**

Otro problema que planteamos:

Problema 3.7

A partir del siguiente plano y teniendo en cuenta su escala:



Calcula las medidas y superficies reales de las habitaciones 1 y 7, y del baño 6.

La solución al problema es:

<u>Medidas y superficies:</u>

Teniendo en cuenta que, según la escala gráfica, 1 centímetro del plano representa un metro en la realidad, vamos a dar directamente las medidas reales:

Habitación 1: ancho: 3,3 m, largo: 4 m, superficie: 13,2 m^2

Habitación 7: ancho: 4,8 m, largo: 4 m, superficie: 19,2 m^2

Baño 6: ancho: 2,5 m, largo: 4 m, superficie: 10 m^2

Como último problema de este campo de problemas planteamos el siguiente:

Problema 3.8

Con la ayuda de un regla calcula:

a) La distancia entre Madrid y Zaragoza.
b) La distancia de A Coruña a Barcelona, pasando por Madrid y Zaragoza.
c) La distancia de A Coruña a Barcelona y se viaja en avión.
d) La escala numérica del mapa.

Cuya solución mostramos a continuación:

a) Sobre el plano, la distancia entre Madrid y Zaragoza es de 2 cm.
Como 1,3 cm del mapa representan 190 km en la realidad, podemos plantear la siguiente relación de proporcionalidad:

$$\frac{1,3}{190} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2 * 190}{1,3} = 292,3\ km$$

b) La distancia de A Coruña a Barcelona será la suma de las distancias intermedias.
En centímetros la suma es: 3,6 + 2 + 1,8 = 7,4 cm.
De manera similar al apartado anterior:

$$\frac{1,3}{190} = \frac{7,4}{x} \Rightarrow x = \frac{7,4 * 190}{1,3} = 1081,5\ km$$

c) De A Coruña a Barcelona directamente sobre el mapa hay 6,4 cm.
Por tanto: $\frac{1,3}{190} = \frac{6,4}{x} \Rightarrow x = \frac{6,4*190}{1,3} = 935,4\ km$

d) Si 1,3 cm representan 190 km, éstos son 19.000.000 cm.
Por tanto $\frac{1,3}{19.000.000} = \frac{1}{14.615.384} \Rightarrow 1{:}\ 14.615.384\ es\ la\ escala\ numérica$

Técnicas y tecnologías asociadas a este campo de problemas

Las principales **técnicas** necesarias para trabajar este campo de problemas son:

- La proporcionalidad numérica que relaciona dos magnitudes, es decir, el cociente de las medidas del objeto representado entre las medidas de dicho objeto en la realidad, lo que llamábamos razón de semejanza ahora pasa a llamarse escala.
- La notación de la escala numérica. Por ejemplo, 1:50000.
- La relación entre las escalas de longitudes y las escalas de áreas.
- Conversión entre unidades de medidas:

Unidades de longitud:

Nombre	Símbolo	Equivalencia metros
Kilometro	km	1.000 m
Hectómetro	hm	100 m
Decámetro	dam	10 m
Metro	m	1 m
Decímetro	dm	0,1 m
Centímetro	cm	0,01 m
Milímetro	mm	0,001 m

Unidades de superficie:

Nombre	Símbolo	Equivalencia metros
Kilometro cuadrado	km^2	1.000.000 m^2
Hectómetro cuadrado	hm^2	10.000 m^2
Decámetro cuadrado	dam^2	100 m^2
Metro cuadrado	m^2	1 m^2
Decímetro cuadrado	dm^2	0,01 m^2
Centímetro cuadrado	cm^2	0,0001 m^2
Milímetro cuadrado	mm^2	0,000001 m^2

Unidades de volumen:

Nombre	Símbolo	Equivalencia metros
Kilometro cúbico	km^3	1.000.000.000 m^3
Hectómetro cúbico	hm^3	1.000.000 m^3
Decámetro cúbico	dam^3	1.000 m^3
Metro cúbico	m^3	1 m^3
Decímetro cúbico	dm^3	0,001 m^3

Centímetro cúbico	cm^3	0,000001 m^3
Milímetro cúbico	mm^3	0,000000001 m^3

Las **tecnologías** que sustentan dichas técnicas son:

- La definición de la razón de semejanza.
- La definición de la escala.

  E= distancia en la representación : distancia en la realidad
- Los tipos de escalas:

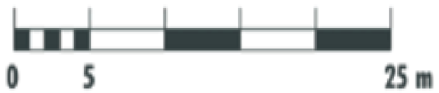
  1. *La escala numérica*:

     a) Escala de ampliación: cuando el tamaño representado es mayor que en la realidad. Se expresa de la forma n:1, es decir, n unidades en el plano equivale a 1 unidad en la realidad.

     b) Escala de reducción: cuando el tamaño representado es menor que en la realidad. Se expresa de la forma 1:n, es decir, 1 unidad en el plano equivale a n unidades en la realidad.

     c) Escala natural: cuando el tamaño representado coincide con el su tamaño en la realidad. Se expresa de la forma 1:1

  2. *La escala gráfica*, la cual es un segmento que indica la relación entre la longitud de la representación y la de la realidad. Por ejemplo:

     Donde una unidad en el plano representa 5 metros en la realidad.

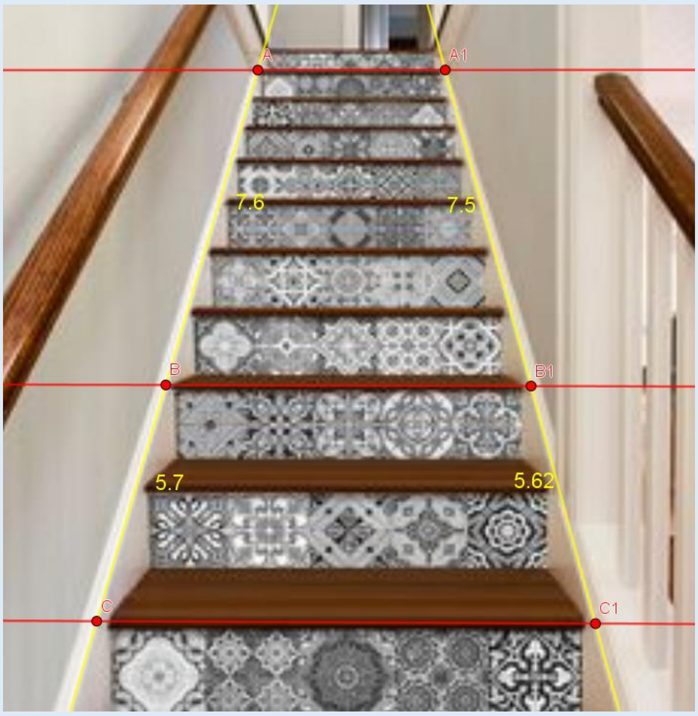
E4. Campo de problemas 4: Teorema de Thales.

Nuestros objetivos para este campo de problemas son que los alumnos sean capaces de aplicar el teorema de Thales ante ciertos tipos de problemas y que sepan identificar rápidamente cuando dos triángulos se encuentran en posición de Thales, por tanto, cuando son semejantes y poder aplicar las propiedades de los triángulos semejantes para resolver problemas.

Empezaremos este campo con el siguiente problema:

Problema 4.1

Observa la siguiente escalera, y los segmentos que se forman:



Calcula las siguientes razones:

$$\frac{AB}{A1B1}, \frac{BC}{B1C1}, \frac{AC}{A1C1}$$

¿Qué conclusión puedes obtener?

El problema nos servirá para debatir sobre las conclusiones que han obtenido los alumnos, y aprovechando el debate, el profesor introducirá el teorema de Thales.

La solución al problema es:

$\frac{AB}{A1B1} = \frac{7{,}6\ cm}{7{,}5\ cm} = 1{,}01$ que es la razón de proporcionalidad entre ambos segmentos

$\frac{BC}{B1C1} = \frac{5{,}7\ cm}{5{,}62\ cm} = 1{,}01$ que vuelve a ser la misma razón de proporcionalidad

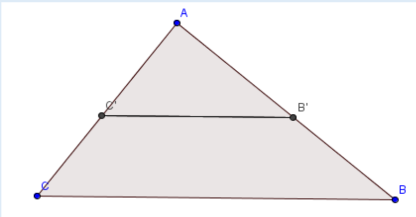
$\frac{AC}{A1C1} = \frac{13{,}3\ cm}{13{,}12\ cm} = 1{,}01$ es decir, se vuelve a mantener la proporción

La conclusión esperada como respuesta, es que los segmentos que forman dos líneas que se cruzan al ser cortadas por líneas paralelas, son segmentos proporcionales entre sí.

Tras el problema anterior, y haberles introducido el teorema de Thales, es buen momento para que intenten hacer el siguiente problema:

Problema 4.2

Sean los triángulos ABC y AB´C´. Donde los lados CB y C´B´ son paralelos y AB=5u, AB´=3u, AC=4u y CB=6u.



a) *¿Cómo son los triangulos entre si?*
b) *Calcula los segmentos AC´ y C´B´.*
c) *¿Cuál es la razón de semejanza?*

Con la siguiente solución:

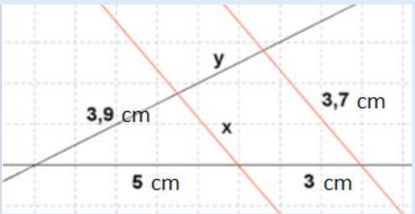
a) Los triángulos ABC y AB'C' son semejantes entre sí. Se puede razonar a simple vista o hacerlo a través de deducir, por el ejercicio anterior, que los lados AC y AC', y AB y AB' son proporcionales, y como comparten el ángulo A, por criterios de semejanza entre triángulos, son semejantes.
b) Como sabemos que $\frac{AB}{AC} = \frac{5\,u}{4\,u}$ y $\frac{AB\prime}{AC'} = \frac{AB}{AC}$, entonces $AC' = \frac{AB\prime * AC}{AB} = \frac{3*4}{5} = \frac{12}{5}\ u$

   Análogamente, $\frac{CB}{AC} = \frac{C'B'}{AC'} \Rightarrow C'B' = \frac{AC' * CB}{AC} = \frac{\left(\frac{12}{5}\right)*6}{4} = \frac{72}{20} = \frac{18}{5}\ u$
c) La razón de semejanza de los triángulos es $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{CB}{CB'} = \frac{5}{3}$

Ahora se les plantea el siguiente problema para practicar las técnicas aprendidas hasta ahora:

Problema 4.3

Calcula los valores de x e y según la siguiente representación:



La solución del problema es la siguiente:

Por el teorema de Thales:

$$\frac{3{,}9}{y} = \frac{5}{3} \Rightarrow \ y = \frac{3{,}9 * 3}{5} = 2{,}34\ cm$$

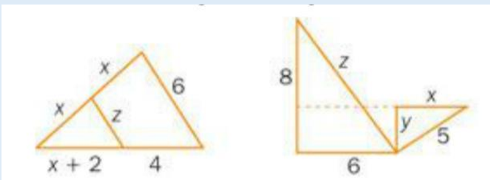
Por estar los triángulos en posición de Thales:

$$\frac{8}{5} = \frac{3{,}7}{x} \ \Rightarrow \ x = \frac{3{,}7 * 5}{8} = 2{,}31\ cm$$

El siguiente problema está recogido de la editorial SM (2018).

Problema 4.4

Calcula los valores desconocidos de las letras en cada una de las siguientes figuras:



La solución al problema es la siguiente:

En la primera figura:

Ambos triángulos están en posición de Thales, por lo que son semejantes y cumplen que: $\frac{2x}{x} = \frac{x+6}{x+2} \Rightarrow 2x^2 + 4x = x^2 + 6x \Rightarrow x^2 - 2x = 0$

Tiene dos posibles soluciones: x=0 u y x=2 u, pero descartamos x=0 u ya que no es una solución factible. Por tanto, x=2 u.

Por otro lado: $\frac{4}{2} = \frac{6}{z} \Rightarrow z = 3$ u.

En la segunda figura:

Si hacemos un giro de 90º a la izquierda del triángulo pequeño sobre el vértice común, se comprueba que los triángulos son semejantes por estar en posición de Thales, por lo que se cumple: $\frac{8}{x} = \frac{6}{y} = \frac{z}{5}$

Por otro lado, si aplicamos Pitágoras al triángulo grande: $z = \sqrt{36 + 64} = 10\ u$

Entonces tenemos que: $\frac{8}{x} = \frac{6}{y} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow \begin{cases} 8 = 2x \Rightarrow x = 4\ u \\ 6 = 2y \Rightarrow y = 3\ u \end{cases}$

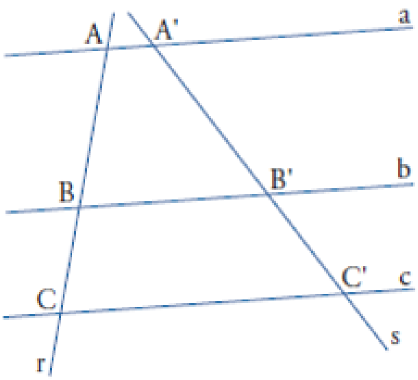
Así x=4 u, y=3 u y z=5 u son las soluciones pedidas.

Técnicas y tecnologías asociadas a este campo de problemas

Las **técnicas** utilizadas en este campo de problemas son:

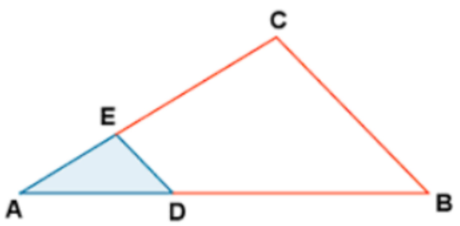
- la propia aplicación del Teorema de Thales y
- la posición de Thales

Teorema de Thales: Si tres rectas paralelas, a, b y c, cortan a dos rectas r y s, los segmentos que determinan son proporcionales.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Triángulos en posición de Thales: Dos triángulos ΔABD y ΔADE están en posición de Thales cuando tienen un ángulo común, Â, y los lados opuestos a este ángulo, DE y BC, son paralelos.



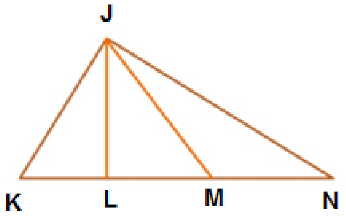
Dos triángulos en posición de Thales son siempre semejantes.

Por otro lado, las **tecnologías** que sustentan estas técnicas son:

- La tecnología que la sustenta el teorema de Thales es la propia demostración del Teorema de Thales.

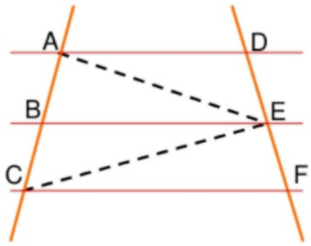
<u>Demostración del teorema de Thales:</u>

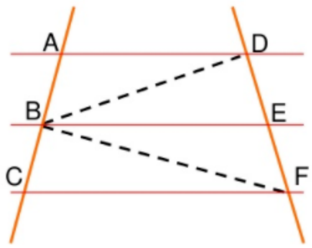
Recordemos que:



$$\frac{Área\ KMJ}{Área\ MNJ} = ((KM * JL)/2)/(MN * JL)/2) = KM/MN$$

Si DE es la altura del triángulo ABD, también lo será del BCD entonces:





$$\frac{Área\ ABE}{Área\ BCE} = \frac{AB}{BC} \qquad \frac{Área\ DBE}{Área\ EBF} = \frac{DE}{EF}$$

Luego los triángulos ABE y DBE tienen la misma base (BE) y las alturas relativas a BE son congruentes, por lo tanto, estos triángulos son equivalentes (tienen igual área).

De la misma forma, los triángulos BCE y EBF son también equivalentes:

$$\frac{Área\ ABE}{Área\ BCE} = \frac{Área\ DBE}{Área\ EBF}$$

De esto, podemos deducir que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

por lo tanto, el teorema queda demostrado.

- Las tecnologías que justifican la técnica de los triángulos en posición de Thales son:
  - Definición de semejanza
  - Teorema de Thales
  - Criterios de semejanza de los triángulos

E5. Campo de problemas 5: División de segmentos.

Este campo de problemas comprende dos tipos de problemas:

- **División de segmentos en partes iguales**.
- **División de segmentos en partes proporcionales**.

Ambos comprenden la misma técnica de resolución y es bastante sencilla, por lo que no nos extenderemos mucho en este campo de problemas.

Nuestro objetivo, es que sean capaces de dividir segmentos con regla y compás, sin necesidad de realizar ningún tipo de cálculo numérico.

Estas técnicas son especialmente útiles si después van a cursar dibujo técnico, pues es una técnica que se les vuelve a enseñar en dicha asignatura.

Problema 5.1.

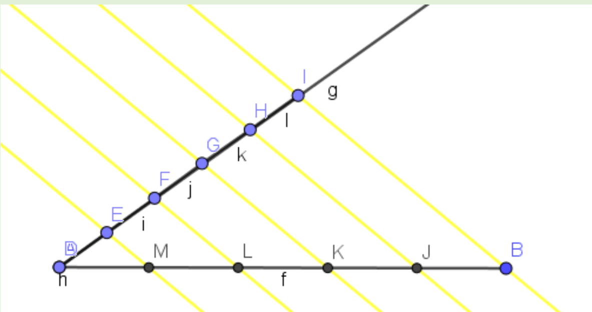
Divide un segmento de longitud cualquiera en 5 partes iguales.

Para la realización y explicación de la técnica para resolver este problema utilizaremos GeoGebra. Todos los alumnos dispondrán de equipo con GeoGebra instalado y realizarán el ejercicio con GeoGebra. De esta manera los alumnos podrán comprobar que esta técnica es independiente de la longitud del segmento que quedamos dividir, y que los pasos son los mismos.

El ejercicio lo realizarán de forma individual siguiendo las explicaciones del profesor.

La solución del ejercicio es la siguiente:

Siguiendo las instrucciones del profesor, los alumnos crearan esta construcción:



Verificarán que desplazando el extremo B del segmento, la construcción sigue siendo válida.

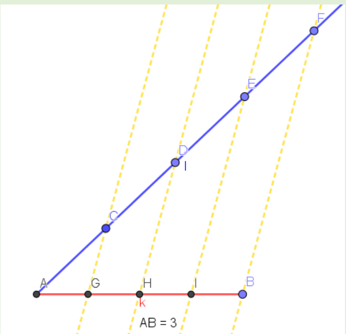
Por el teorema de Thales, podremos asegurar que la longitud de los segmentos AM, ML, LK, KJ y JB siempre es las misma.

Para que ejerciten la técnica se le propondrá el siguiente problema, también para realizar con GeoGebra de forma individual:

Problema 5.2.

Dibuja un segmento AB de 3 cm de longitud y divídelo en cuatro partes iguales.

Este ejercicio es similar al anterior solo que ya definimos la longitud del segmento AB como fija y la solución es la siguiente:



El resultado esperado es una construcción, en la que un segmento de longitud 3, sea dividido en 4 partes iguales como la construcción que se muestra.

Otro tipo de problema es la división de un segmento en partes proporcionales, como es el caso del siguiente ejercicio:

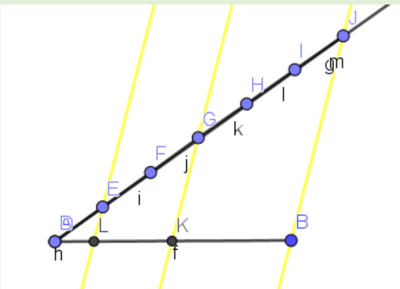
Problema 5.3.

Divide un segmento de 5 cm de longitud en tres partes, de tal manera que la segunda sea el doble que la primera y la tercera el triple de la primera.

Este problema consiste en dividir un segmento dado en partes que cumplen una proporción, la técnica será la misma, pero ayudándonos de una semirrecta con segmentos que cumplan la proporción.

La solución del ejercicio es la siguiente:

Sobre la semirrecta generamos 3 segmentos: el primero de longitud 1, el segundo de longitud 2 y el tercero de longitud 3. Posteriormente aplicamos la misma técnica de trazar rectas paralelas a la JB para hallar los puntos de corte del segmento AB:



Por último, un problema similar, pero contextualizado:

Problema 5.4.

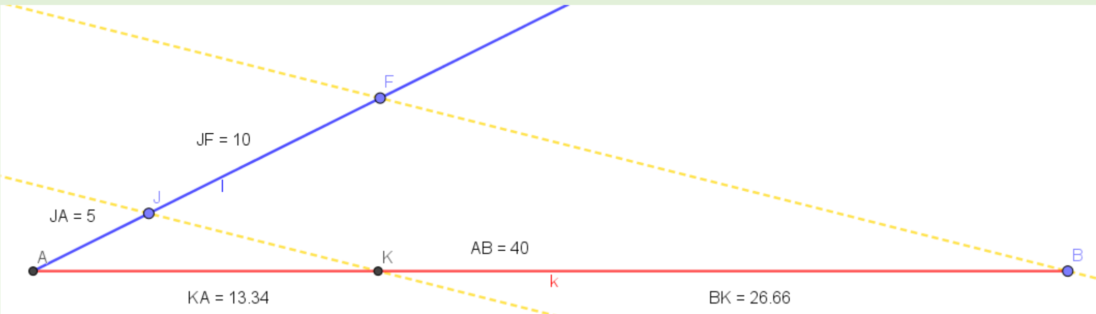
Ana y Andrés han puesto 10 y 5 céntimos de euro respectivamente, para comprar una barra de regaliz de 40 cm. Si van a hacer un reparto proporcional a lo que han puesto cada uno, ¿cómo dividirán la barra de regaliz? (hazlo mediante la división de segmentos en partes proporcionales)

La solución sería la siguiente:

Sobre una semirrecta con origen en A, hacemos un segmento de longitud 5 y anexo a él otro de longitud 10, que es lo que han pagado cada uno por la barra de regaliz.

Hacemos un segmento con uno de sus extremos en A y 40 de longitud (que es la longitud de la barra). Uniendo los puntos F y B, y trazando la paralela por J, tendremos la barra divida en las partes proporcionales que les corresponden a Ana y Andrés.

En este caso a Ana le corresponden 26,66 cm de barra y a Andrés 13,34 cm.



Técnicas y tecnologías asociadas a este campo de problemas

Las **técnicas** usadas son:

- **División de un segmento en partes iguales:**

1. A partir del segmento dado AB, trazamos una semirrecta desde A formando un ángulo menor que 90º con el segmento AB.
2. Sobre esta semirrecta dibujamos tantos segmentos consecutivos de la misma longitud como partes iguales queramos dividir el segmento AB
3. Unimos el extremo final del último segmento con el punto B, y trazamos paralelas a esta recta por los extremos de los otros segmentos señalados en la semirrecta que cortará al segmento AB en tantas partes iguales como deseábamos.

- **División de un segmento en partes proporcionales:**

1. A partir del segmento dado AB, trazamos una semirrecta desde A formando un ángulo menor que 90º con el segmento AB.
2. Sobre esta semirrecta dibujamos los segmentos proporcionales consecutivos que queremos obtener del segmento AB.
3. Unimos el extremo final del último segmento con el punto B, y trazamos paralelas a esta recta por los extremos de los otros segmentos señalados en la semirrecta que cortará al segmento AB en tantas partes proporcionales como deseábamos.

Las **tecnologías** que justifican dichas técnicas:

- el Teorema de Thales y
- la observación de los propios segmentos junto a su medición.

E6. Campo de problemas 6: Distancias inaccesibles.

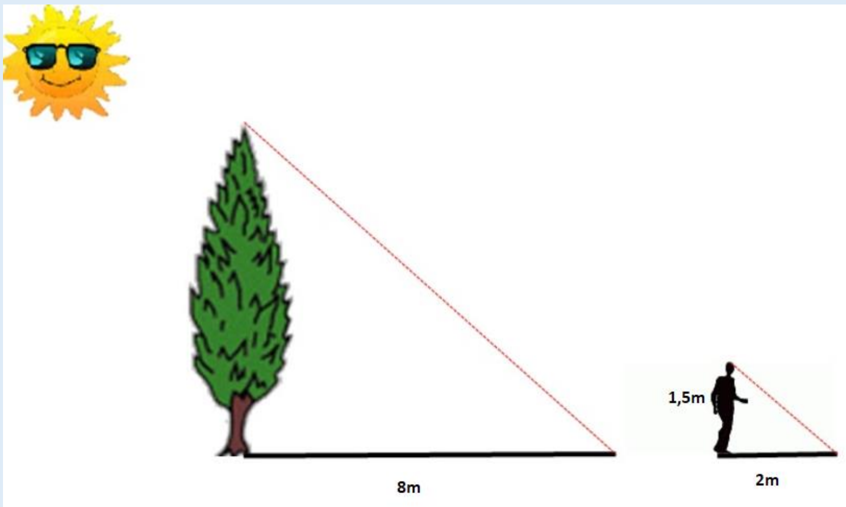
Nuestro objetivo principal será aprender a resolver problemas contextualizados mediante el uso de la semejanza de triángulos y el teorema Thales.

Para la resolución de este campo de problemas, los alumnos deberán hacer uso de todos los conocimientos que han ido adquiriendo hasta ahora en relación con la semejanza y el teorema de Thales, para poder resolver problemas donde se pide calcular el valor de una medición que es inaccesible, como por ejemplo alturas de edificios, anchuras de ríos, etc.

Una característica de este tipo de problemas es que el profesor puede contextualizarlos al entorno de los alumnos y, por ejemplo, salir al patio a medir alturas de ciertos objetos como árboles, el propio edificio escolar, farolas, etc., que siempre es una actividad muy motivadora para los alumnos, además de que los alumnos comprueban la utilidad de las matemáticas que tantas veces cuestionan en el aula.

Problema 6.1.

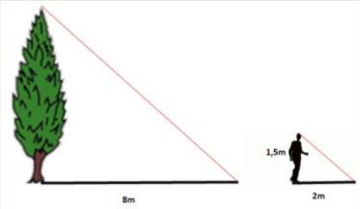
A cierta hora del día, Luis observa que proyecta una sombra de 2 metros. Si sabemos que Luis mide 1,5 metros y que la sombra de cierto arbol mide 8 metros, ¿cuál será la altura de dicho árbol?



Este problema es muy similar al que habíamos plantado como razón de ser, por lo que los alumnos no tendrán ningún problema para resolverlo, pero es importante que vayan acostumbrándose a reconocer triángulos semejantes.

La solución al problema sería la siguiente:

Como la sombra proyectada es en el mismo momento del día, los triángulos formados son semejantes:

: 

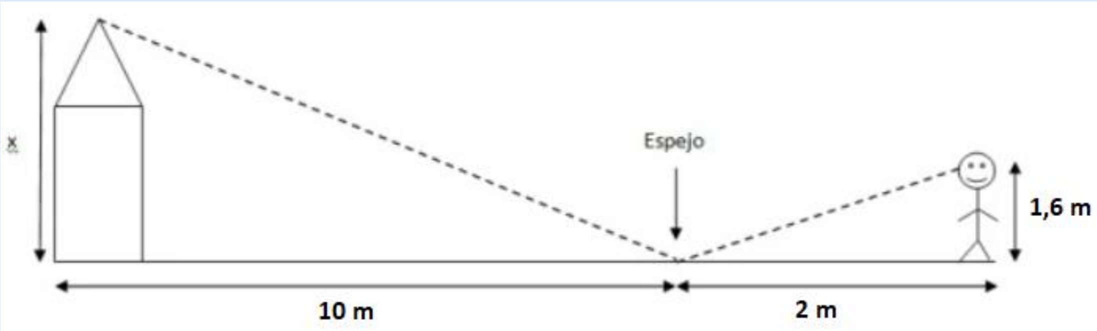
Dos maneras de resolver:

- por Thales: $\frac{h}{8} = \frac{1,5}{2} \Rightarrow h = \frac{1,5*8}{2} = 6\, metros\ mide\ el\ arbol\ de\ altura$
- por semejanza: $\frac{h}{1,5} = \frac{8}{2} \Rightarrow h = \frac{1,5*8}{2} = 6\, metros\ mide\ el\ arbol\ de\ altura$

Otro problema que les planteamos es el siguiente:

Problema 6.2.

Elena quiere conocer la altura del campanario de su pueblo. Para ello va a colocar un espejo en el suelo, entre el campanario y ella, de forma que, de pie, puede ver la parte más alta del campanario reflejada en el espejo según se muestra en la figura:



¿Qué altura tiene el campanario?

Daremos un tiempo prudencial para que los alumnos puedan hacer el ejercicio, resolviendo las cuestiones que les pudieran surgir. Cuando hayan finalizado, se debatirá sobre cómo lo han resuelto. En el debate surgirá que el triángulo formado por el espejo y la base y alto del campanario será semejante al formado por el espejo, los pies de Elena y sus ojos. Deben entender que ambos triángulos son semejantes porque el ángulo con el cual incide la mirada de Elena en el espejo es el mismo con el que sale. De ahí, que puedan aplicar la semejanza entre triángulos para resolver el ejercicio.

Como el hecho de poner un espejo en el suelo es un poco forzado en el contexto de la vida cotidiana, se les explicará que pueden utilizar por ejemplo el reflejo de un charco para poder realizar este tipo de mediciones para calcular medidas de objetos inaccesibles.

La solución al problema sería esta:

En un espejo, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de salida, por lo tanto, podemos aplicar semejanza o Thales para resolver el problema.

Por Thales, tenemos que:

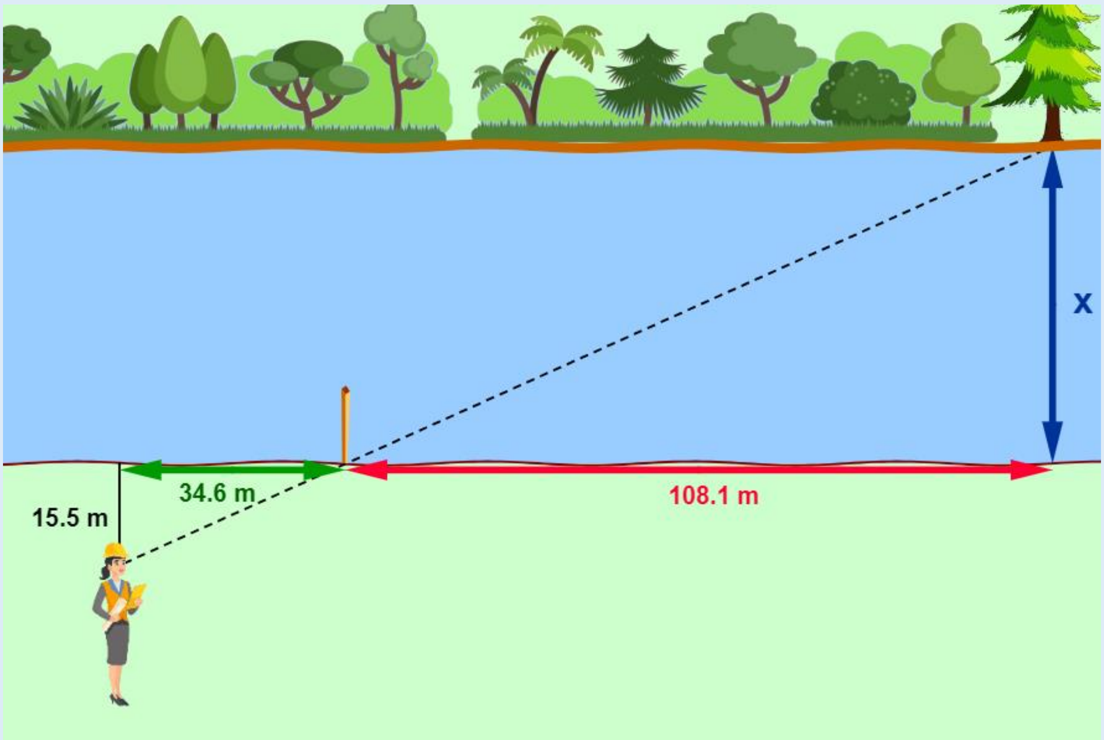
$$\frac{x}{10} = \frac{1{,}6}{2} \Rightarrow x = \frac{1{,}6 * 10}{2} = 8\, metros$$

Por tanto, la altura del campanario es de 8 metros.

Otro tipo de problema típico es el calcular la anchura de un río, como puede ser el siguiente:

Problema 6.3.

Para calcular la anchura de un río, una ingeniera se sitúa en frente de un árbol que hay en la otra orilla. Después camina 108.1 metros por la orilla del rio y clava un poste en el suelo. En la misma dirección, por la orilla camina otros 34,6 metros. Finalmente retrocede 15,5 metros perpendicularmente al río hasta que ve el poste enfrente del árbol de referencia. ¿Qué anchura tiene el río?



Daremos un tiempo para que el alumnado intente resolver el problema, muchos de ellos lo resolverán correctamente gracias al gráfico que lo representa.

Posteriormente les mostraremos la construcción de GeoGebra https://www.geogebra.org/m/jUJG2wp9 donde se muestra el proceso que se debe seguir para medir este tipo de distancias que no nos son accesibles, como la anchura de un río a través de la semejanza. Lo interesante es que vean que los ángulos formados por la orilla del río, el poste y la ingeniera y el formado por la orilla, el poste y el árbol, son iguales y por tanto volvemos a tener dos triángulos semejantes, por lo que podemos volver a aplicar las propiedades de la semejanza.

La solución al problema es la siguiente:

Es importante identificar que los triángulos formados son semejantes, ya que los ángulos formados por la orilla del río, el poste y la ingeniera y el formado por la orilla, el poste y el árbol, son iguales.

Entonces, por Thales:

$$\frac{x}{108,1} = \frac{15,5}{34,6} \Rightarrow x = \frac{15,5 * 108,1}{34,6} = 48,4$$

Por tanto, la anchura pedida del río es de 48,4 metros.

Además de alturas, y distancias, también podemos aplicar Thales para calcular profundidades, como en el siguiente problema:

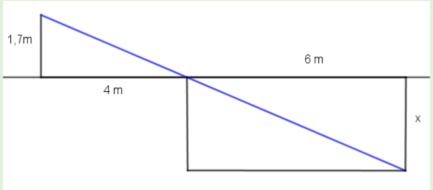
Problema 6.4.

Determina la profundidad de una piscina que mide 6 metros de ancho, sabiendo que una persona que mide 1,7 metros de altura, y está situada a 4 metros del borde, visualiza la esquina inferior de la piscina.

En este problema, como en la mayoría de los problemas de geometría es importante que los alumnos interpreten bien los datos y hagan una representación del problema que les permita decidir que técnica utilizaran para su resolución. En este caso, en cuando vean que los dos triángulos que se forman son equivalentes, sólo tendrán que aplicar Thales.

La solución es la siguiente:

La representación gráfica del problema es la siguiente:



Al ser triángulos semejantes, aplicamos Thales:

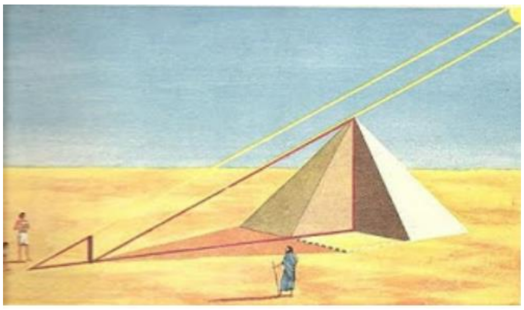
$$\frac{x}{6} = \frac{1,7}{4} \Rightarrow x = \frac{1,7 * 6}{4} = 2,55\ m\ de\ profundidad$$

En el siguiente problema se pretende medir la Gran Pirámide de Guiza 27 siglos después de que lo hiciera Thales de Mileto, aplicando la misma técnica que él utilizó.

Problema 6.5.

A partir de la foto tomada desde satélite que aparece en GoogleMaps de la Gran Pirámide de Guiza, y ayudándonos por las referencias de las sombras de la propia pirámide y de un autobús del parking, ¿podrías calcular la altura de la pirámide como lo hizo Thales? Nota: la altura del autobús es de 4 metros.

El profesor contextualizará cómo Thales de Mileto ante el faraón, utilizando un bastón de 1,5 metros y observando la sombra generada por el bastón y la sombra que en ese mismo momento generaba la pirámide, determinó la altura de esta última utilizando la semejanza entre triángulos.



Este problema, es el colofón de todo lo que se ha explicado sobre semejanza y Thales, pues es una combinación de escalas y sombras, aunque como no nos dan la escala, se debe plantear como un problema de sombras, no es complicado y hemos hecho algunos muy parecidos.

La solución al problema sería la siguiente:

Nota: Aunque los datos con los que operamos dependen del tamaño de la impresión, el resultado debe dar el mismo.

Al ser un problema de sombras podemos aplicar Thales:

$$\frac{h}{115} = \frac{4}{3{,}3} \Rightarrow h = \frac{115 * 4}{3{,}3} = 139\, metros\ de\ altura$$

Lo interesante es que da una idea a los alumnos de las posibilidades que tiene lo que han aprendido sobre semejanza y el teorema de Thales, y cómo podemos aplicarlo en contextos cotidianos.

Técnicas y tecnologías asociadas a este campo de problemas

Este campo de problemas engloba las técnicas y tecnologías que hemos explicado en los anteriores campos de problemas.

Las **técnicas** que se usan para el cálculo de distancias inaccesibles son:

- Formación triángulos semejantes para poder establecer la relación de semejanza entre los triángulos, de acuerdo con las proporciones entre los segmentos que los forman.
- Para obtener el dato desconocido se realizan operaciones algebraicas para despejar la incógnita o se puede usar la regla de los productos cruzados.
- Eventualmente, para la resolución de algún problema puede que tengamos que obtener algún cateto de un triángulo teniendo como dato su hipotenusa, entonces utilizaríamos que la suma de los cuadrados de los catetos es igual a la hipotenusa al cuadrado, esta tecnología estará sustentada por el teorema de Pitágoras.

Las **tecnologías** que justifican estas técnicas:

- El teorema de Thales.
- Eventualmente, para ciertos tipos de problemas en los que nos dan como dato la hipotenusa y puede ser necesario el cálculo de algún cateto, el teorema de Pitágoras justificaría dicha técnica.

F. Secuencia didáctica

La secuenciación de las actividades que hemos propuesto en los anteriores apartados será aproximada, con la consideración de que cada sesión tiene una duración de 50 minutos.

Se ha tenido en cuenta para la asignatura completa el número de sesiones aproximadas son de 130. Por lo que 12 sesiones, incluyendo la prueba escrita, que no llegan al 10% del total de la asignatura nos parece una distribución bastante razonable para poder tratar el bloque de semejanza.

<table>
<tr><th>Sesión</th><th>Actividades</th><th>Técnicas</th><th>Tecnologías</th></tr>
<tr><td>1</td><td>▪ Prueba de nivel inicial.
▪ Corrección de la prueba en clase.</td><td>▪ Clasificación de los triángulos.
▪ Fórmulas de áreas de polígonos.
▪ Propiedades de la proporcionalidad.</td><td>▪ Definición de triángulo.
▪ Definición de área.
▪ Definición de proporcionalidad.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>▪ Problema Razón de ser #1 (Semejanza de figuras).
▪ Ejercicio 1.1.
▪ Institucionalización de los conceptos semejanza y razón de semejanza.
▪ Ejercicio 1.2.</td><td rowspan="2">▪ Criterios de semejanza de polígonos.
▪ Cálculo de razón de semejanza mediante el cociente entre lados.</td><td rowspan="3">▪ Definición de semejanza y razón de semejanza.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>▪ Ejercicio 1.3.
▪ Ejercicio 1.4.
▪ Institucionalización de los conceptos semejanza entre polígonos.
▪ Ejercicio 1.7.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>▪ Ejercicio 1.8.
▪ Institucionalización de los criterios de semejanza de triángulos.
▪ Ejercicio 1.9.</td><td>▪ Criterios de semejanza de triángulos.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>▪ Ejercicio 2.1.
▪ Institucionalización de la relación entre razón de semejanza, de perímetros y de áreas.
▪ Ejercicio 2.2.
▪ Ejercicio 2.4.</td><td>▪ Proporción formada por el cociente de los perímetros, áreas y volúmenes de dos cuerpos semejantes.
▪ Relación entre razón de semejanza, de perímetros, de áreas y de volúmenes</td><td>▪ Definición de razón de semejanza, de perímetros, de áreas y de volúmenes.</td></tr>
</table>

6	▪ Problema Razón de ser #2 (Escalas). ▪ Ejercicio 3.1. ▪ Institucionalización de escala ▪ Ejercicio 3.2. ▪ Ejercicio 3.6.	▪ La proporcionalidad numérica entre dos magnitudes ▪ La notación de la escala. ▪ La relación entre longitudes y áreas. ▪ Conversión entre unidades de medidas	▪ Definición de escala. ▪ Clasificación de escalas (ampliación, reducción y natural). ▪ Diferencia entre escala numérica y gráfica.
7	▪ Ejercicio 4.1. ▪ Institucionalización del Teorema de Thales. ▪ Ejercicio 4.2. ▪ Ejercicio 4.3. ▪ Ejercicio 4.4.	▪ Teorema de Thales. ▪ Triángulos en posición de Thales.	▪ Demostración del teorema de Thales. ▪ Definición de semejanza. ▪ Criterios de semejanza de triángulos.
8	▪ Explicación técnica para la división de segmentos. ▪ Ejercicio 5.1. ▪ Ejercicio 5.2. ▪ Ejercicio 5.3.	▪ Procedimiento para la división de un segmento en partes iguales y proporcionales.	▪ Teorema de Thales. ▪ Visualización de los segmentos iguales y/o proporcionales.
9	▪ Problema Razón de ser #3 (Mediciones inalcanzables). ▪ Ejercicio 6.1. ▪ Ejercicio 6.2. ▪ Ejercicio 6.3.	▪ Teorema de Thales ▪ Triángulos en posición de Thales. ▪ Métodos para medir distancias inaccesibles.	▪ Definición de semejanza.
10	▪ Repaso general de la unidad: ▪ Ejercicio 1.6. ▪ Ejercicio 2.3. ▪ Ejercicio 3.3. ▪ Ejercicio 3.4. ▪ Ejercicio 6.6.	▪ Repaso de las principales técnicas vistas durante la unidad.	▪ Repaso general de las tecnologías vistas durante la unidad.
11	▪ Examen de evaluación de conocimientos de la unidad		
12	▪ Entrega de los exámenes para su revisión. ▪ Corrección del examen.		

G. Evaluación

La prueba de evaluación de la unidad será escrita y constará de 6 preguntas. Durante la prueba, el alumnado aplicará los conceptos aprendidos y demostrará los conocimientos adquiridos de la unidad didáctica. En la prueba podrán llevar una calculadora y regla para la realización de los problemas.

De cada pregunta, basándonos en lo aprendido durante la asignatura de Evaluación e innovación docente e investigación educativa en Matemáticas impartida por Sergio Martínez, analizaremos los siguientes aspectos:

- Los campos de problemas, las técnicas y las tecnologías que se evalúa.
- Las tareas principales, las tareas auxiliares específicas y generales.
- Los estándares de aprendizaje de la LOMCE evaluados.
- Las diferentes respuestas correctas que se podrían esperar.
- Los posibles errores que se pueden cometer en la respuesta.
- Los criterios de calificación que se van a emplear.

Notar que los criterios de calificación, si bien están inspirados en el criterio de tercios, se introducen ajustes que individualizan dichos criterios para cada ejercicio.

La nota de la evaluación de la unidad didáctica se obtendrá realizando una media ponderada de la prueba escrita, ejercicios de GeoGebra y cuaderno de clase, con los siguientes pesos:

- Prueba escrita: 80%
- Ejercicios GeoGebra: 10%
- Cuaderno de clase: 10%

En la calificación del cuaderno de clase se tendrán en cuenta si el alumno ha realizado todos los ejercicios planteados en esta unidad y los enviados como ejercicios para casa, sumando un punto extra en la nota del cuaderno si ha hecho todos los ejercicios que se han planteado como voluntarios. Además, aspectos como la limpieza y claridad de los contenidos en el cuaderno e incluso la actitud observada en clase, formarán parte de la calificación del cuaderno.

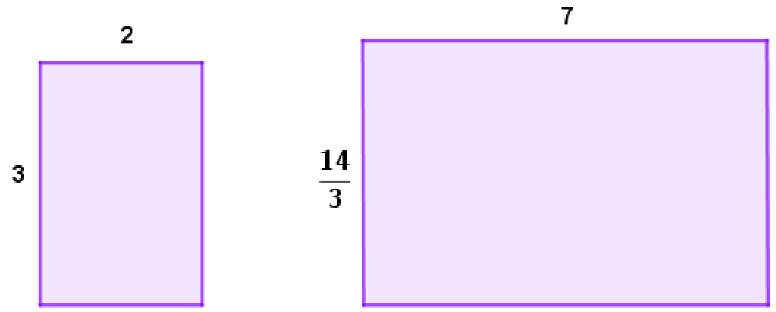
G1. Prueba escrita

En la prueba escrita se engloban los distintos campos de problemas tratados en la propuesta didáctica que hemos desarrollado, de tal manera que la prueba está diseñada para poder ser realizada holgadamente en una sesión de 50 minutos, aun así, se intentará realizar en la sesión que precede al descanso de recreo para poder alargar el tiempo destinado a la realización de la prueba para aquellos alumnos que pudieran necesitar algo más de tiempo.

Ejercicio 1. (2 puntos)

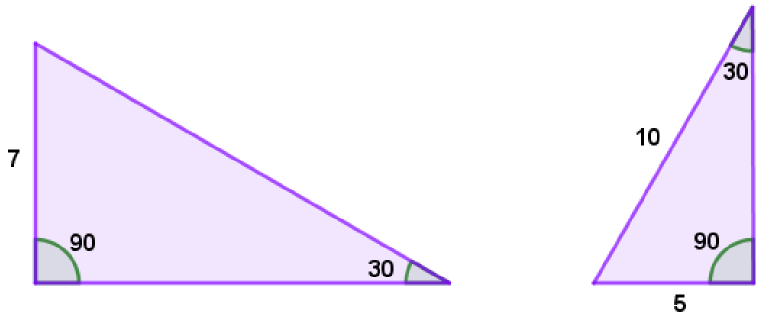
¿Son semejantes las siguientes figuras? En caso de serlo calcula su razón de semejanza respecto a la primera de ellas. Razona tu respuesta. (2 puntos)

a)



(1 punto)

b)



(1 punto)

Campo de problemas

Este problema pertenece al campo 1: Figuras semejantes y propiedades.

Técnicas

- Criterio de semejanza de polígonos: dos polígonos son semejantes si tienen los ángulos homólogos iguales y los lados correspondientes son proporcionales.
- Criterios de semejanza de triángulos. En este caso, dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.
- Definición de razón de semejanza: Es el cociente entre sus lados semejantes.

Tecnologías

- Definición de proporcionalidad.
- Definición de semejanza.
- Visualización de figuras semejantes.

Tareas principales y auxiliares

- *Tareas principales*
  - Entender el concepto de semejanza.
  - Conocer los criterios de polígonos semejantes.
  - Conocer los criterios de triángulos semejantes.
  - Usar un método adecuado para comprobar si dos figuras son semejantes.
  - Calcular correctamente la razón de semejanza entre dos figuras semejantes.
- *Tareas auxiliares específicas*
  - Cociente entre los lados de un rectángulo para ver si dos rectángulos son semejantes
- *Tareas auxiliares generales*
  - Operaciones aritméticas y algebraicas.

Estándares de aprendizaje

- **Est.MA.3.4.1.** Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes.
- **Est.MA.1.2.1.** Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).

Posibles respuestas correctas

1. **a)** Sí, son figuras semejantes puesto que:
   - ambos son rectángulos y los lados correspondientes son proporcionales: $\frac{\frac{14}{3}}{2} = \frac{7}{3}$.
   - Ambos son rectángulos y el cociente de los lados es el mismo: $\frac{7}{\frac{14}{3}} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$

   Su razón de semejanza es (la semejanza respecto a la primera figura):

   - k=7/3

   b) Sí, son figuras semejantes por el primer criterio de semejanza entre triángulos: Dos triángulos son semejantes si dos de sus ángulos son iguales (en este caso 90º y 30º).

   Su razón de semejanza es (la semejanza respecto a la primera figura):

   - k=5/7

Posibles errores

- Al estar los rectángulos girados el uno respecto al otro, es posible que, si deciden comprobar la proporcionalidad entre lados equivalentes, lo hagan entre lados no equivalente y resulten no proporcionales al darse que $\frac{\frac{14}{3}}{3} \neq \frac{7}{2}$.
- Si se decide comprobar la semejanza por el método de cociente entre lados del rectángulo, al estar girado uno de ellos puede ocurrir que planteen mal el cociente entre lados, por ejemplo: $\frac{\frac{14}{3}}{7} \neq \frac{3}{2}$.
- El rectángulo, al tener un lado como una expresión de un cociente, posible error aritmético al hacer un cociente de otro cociente.
- En el triángulo, al darse el dato de una diagonal en uno de ellos que no es necesaria para la resolución del problema, es posible que intenten utilizar ese dato, y al no tenerlo en el otro triángulo, den respuestas del tipo no son semejantes o no se puede saber…

- Que al hallar la razón de semejanza del rectángulo “crucen datos” (al estar uno de ellos girado 90 grados) y en vez de tomar los catetos, tomen un cateto y la hipotenusa del otro para calcular la razón de semejanza: 10/7.
- Otro posible error es que calculen la razón de semejanza del primero respecto al segundo.

Criterios de calificación

La pregunta valdrá **2 puntos** repartidos de la siguiente manera:

Apartado a):

Se valorará con hasta **0,5 puntos** si dicen que las figuras son semejantes y lo justifican correctamente (por razonamientos teóricos, cálculos, etc.). Si la respuesta es que son semejantes, pero no se justifica, se podrá quitar hasta 0,5 puntos.

Se valorará con hasta **0,5 puntos** si calculan la razón de semejanza.

Apartado b):

Se valorará con hasta **0,5 puntos** si dicen que las figuras son semejantes y lo justifican correctamente (por razonamientos teóricos, cálculos, etc.). Si la respuesta es que son semejantes, pero no se justifica, se podrá quitar hasta 0,5 puntos.

Se valorará con hasta **0,5 puntos** si calculan la razón de semejanza.

Teniendo en cuenta que:

- Por errores en las tareas principales podremos quitar hasta un 100% de la puntuación.
- Por errores en las tareas auxiliares podremos quitar hasta un 67% de la puntuación.
- Por errores en las tareas auxiliares generales podremos quitar hasta un 33% de la puntuación.

Ejercicio 2. (1 punto)

Calcula el lado de un triángulo equilátero, sabiendo que un segundo triángulo, que semejante al primero, tiene un perímetro de 40 cm y que la razón entre las áreas de dichos triángulos es $\frac{16}{9}$.

Campo de problemas

Este problema pertenece al campo 2: Razón de semejanza en longitudes y áreas.

Técnicas

- Criterio de semejanza de polígonos: dos polígonos son semejantes si tienen los ángulos homólogos iguales y los lados correspondientes son proporcionales.
- Definición de razón de semejanza. En este caso, sean dos triángulos ABC y A'B'C' semejantes, entonces su razón de semejanza será k:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k$$

- La relación que existe entre la razón de semejanza (k), la razón de perímetros (k) y la razón de áreas (k^2).

Tecnologías

- Definición de semejanza.
- Visualización de figuras semejantes.
- Definición de razón de perímetros.
- Definición de razón de áreas.

Tareas principales y auxiliares

- *Tareas principales*
  - Saber los criterios de polígonos semejantes.
  - Entender el concepto de semejanza.
  - Comprender los conceptos de ampliación y reducción
  - Entender la relación entre la razón de semejanza, la razón entre perímetros y la razón entre áreas.

- ➢ *Tareas auxiliares específicas*
  - Conocer la relación entre el perímetro y el lado de un triángulo equilátero.
- ➢ *Tareas auxiliares generales*
  - Operaciones aritméticas y algebraicas.

Estándares de aprendizaje

- ➢ **Est.MA.3.4.1.** Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes.
- ➢ **Est.MA.1.2.1.** Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).

Posibles respuestas correctas

Una posible respuesta correcta que se espera:

$$\frac{\text{Área t2}}{\text{Área t1}} = \frac{16}{9} \Rightarrow k^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow k = \frac{4}{3}$$

1ª forma: calcula el perímetro del primer triangulo y después el lado:

Cómo la relación entre perímetros es k, entonces:

$$\frac{Perímetro\ 2}{Perímetro\ 1} = k \Rightarrow \frac{40}{Perímetro\ 1} = \frac{4}{3} \Rightarrow Perímetro\ 1 = \frac{40 * 3}{4} = 30$$

30/3 = 10 cm mide el lado del primer triángulo equilátero.

2ª forma: calcula el lado del segundo triangulo y por semejanza el del primero:

$$\frac{40}{3}\ es\ el\ lado\ del\ triangulo\ 2 \Rightarrow \frac{\frac{40}{3}}{lado\ 1} = k = \frac{4}{3} \Rightarrow lado\ 1 = \frac{40}{3} * \frac{3}{4} = 10\ cm$$

Posibles errores

- No acordarse de lo que es un triángulo equilátero.
- Interpretar mal cual es el triángulo de referencia y cuál es el semejante.
- No acordarse de la relación entre las razones entre perímetros y las razones entre las áreas.
- No acordase de la relación entre razón de semejanza y razón entre áreas.
- En el caso de calcular primero el lado del triángulo segundo, trabajar con decimales, lo cual dará errores de aproximación.

Criterios de calificación

La pregunta vale **1 punto**.

Si el alumno a través de la razón entre áreas calcula correctamente la razón de semejanza o entre perímetros, y lo razona obtendrá hasta **0,5 puntos**.

Si lo primero que hace es calcular el lado del triángulo 2 y por semejanza el lado del triángulo 1, entonces obtendrá hasta **0,5 puntos**.

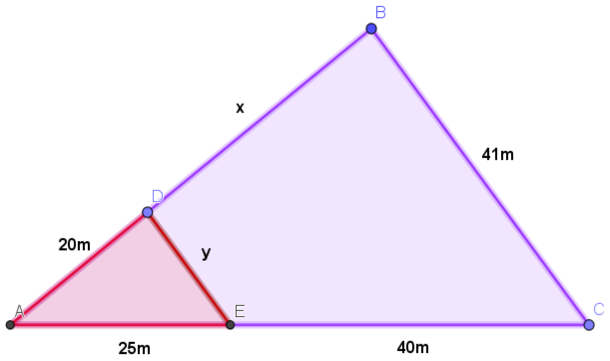
Si en cambio, primero calcula el perímetro del triángulo 1 y a partir de ahí el lado, también obtendrá hasta **0,5 puntos**.

Teniendo en cuenta que:

- Por errores en las tareas principales podremos quitar hasta un 100% de la puntuación.
- Por errores en las tareas auxiliares podremos quitar hasta un 67% de la puntuación.
- Por errores en las tareas auxiliares generales podremos quitar hasta un 33% de la puntuación.

Ejercicio 3. (2 puntos)

Calcula la longitud de los lados x e y de la parcela delimitada por el cuadrilátero BCED, sabiendo que los lados DE y BC son paralelos.



Campo de problemas

Este problema pertenece al campo 4: Teorema de Thales.

Técnicas

- Aplicación del Teorema de Thales. Triángulos en posición de Thales.
- Razón de semejanza: cociente entre la longitud de un lado de un polígono y la longitud del lado correspondiente del otro polígono. Si dos triángulos, ADE y ABC, son semejantes entonces diremos que su razón de semejanza es:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{CA}{EA} = k$$

Tecnologías

- Definición de semejanza.
- Teorema de Thales.
- Definición de triángulos en posición de Thales.

Tareas principales y auxiliares

- *Tareas principales*
  - Reconocer cuando dos triángulos en posición de Thales.
  - Entender el concepto de semejanza y de razón de semejanza.
  - Conocer la fórmula del Teorema de Thales o en su defecto la de razón de semejanza.
- *Tareas auxiliares específicas*
  - Aplicar correctamente la fórmula del Teorema de Thales.
  - Aplicar correctamente la fórmula de la razón de semejanza.
- *Tareas auxiliares generales*
  - Operaciones aritméticas y algebraicas

Estándares de aprendizaje

- **Est.MA.3.4.1.** Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes.
- **Est.MA.1.2.1.** Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).

Posibles respuestas correctas

Los triángulos ADE y ABC están en posición de Thales porque ambos tienen un ángulo común, A, y los lados opuestos a este ángulo, BC y DE, son paralelos. Por tanto, son semejantes.

A partir de razonar que son semejantes, dos maneras posibles de resolver el problema:

1.- A partir de la fórmula del teorema de Thales:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EC} \Rightarrow \frac{20}{25} = \frac{x}{40} \Rightarrow x = \frac{20 * 40}{25} = 32$$

2.- A partir de la fórmula de triángulos en posición de Thales o por semejanza:

a) Aplicando directamente la relación entre lados de triángulos semejantes:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{20}{x+20} = \frac{25}{25+40} \Rightarrow x = \frac{20 * 65}{25} - 20 = 32$$

b) También puede calcular la razón de semejanza entre lados semejantes y con la razón calcular el lado x a través del producto de la razón de semejanza por el lado conocido.

Por tanto, la longitud el lado x es 32 m.

Para calcular el lado y, por semejanza o triángulos en posición de Thales:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{CA}{EA} \Rightarrow \frac{52}{20} = \frac{41}{y} \Rightarrow y = 41 * \frac{20}{52} = 41 * \frac{5}{13} = 15{,}77\ m$$

Y análogamente al lado x si lo hacemos calculando la razón de semejanza.

Posibles errores

- No darse cuenta de que están en posición de Thales y por tanto son semejantes
- Aplicar mal el teorema de Thales. Por ejemplo: $\frac{y}{25} = \frac{41}{40}$ porque no se dan cuenta que un lado del triángulo ABC es 20+y y el otro 25+40, y sólo consideran 40 como lado.
- Realizar mal las operaciones algebraicas e incluso aritméticas.

Criterios de calificación

Hallar las soluciones correctas con las explicaciones oportunas, valdrá **2 puntos**.

Los puntos se repartirán de la siguiente manera:

- **2/3 de punto** si justifica que están en posición de Thales y por tanto son semejantes.
- **2/3 de punto** si calcula correctamente x.
- **2/3 de punto** si calcula correctamente y.

Teniendo en cuenta que:

- Por errores en las tareas principales podremos quitar hasta un 100% de la puntuación.
- Por errores en las tareas auxiliares podremos quitar hasta un 67% de la puntuación.
- Por errores en las tareas auxiliares generales podremos quitar hasta un 33% de la puntuación.

Ejercicio 4. (1 punto)

La escala de un mapa de España es 1:2.000.000.

a) En el mapa, la distancia que medimos entre Zaragoza y Sevilla es de 40 cm. ¿A cuántos kilómetros se encuentran estas dos ciudades en la realidad?
b) En la realidad, la distancia entre Barcelona y Cádiz es de 1100 km, ¿a qué distancia se encontrarán en el mapa?

Campo de problemas

Este problema pertenece al campo 3: Escalas.

Técnicas

- Definición de escala como: razón de semejanza entre la figura representada y la figura original.
- Conversión entre unidades de medidas

Tecnologías

- Definición de escala.

Tareas principales y auxiliares

- *Tareas principales*
  - Entender el concepto de escala como el cociente de las medidas de un objeto representado entre las medidas dicho objeto en la realidad.
  - Conocer la fórmula de razón de semejanza.
  - Interpretar correctamente la notación numérica de la escala.
- *Tareas auxiliares específicas*
  - Calcular correctamente los cambios de unidad necesarios.
- *Tareas auxiliares generales*
  - Operaciones aritméticas y algebraicas

Estándares de aprendizaje

- **Est.MA.3.4.2.** Utiliza la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza.
- **Est.MA.1.2.1.** Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).

Posibles respuestas correctas

a) Sólo existe una respuesta correcta, que consiste en multiplicar 40cm*2.000.000= 80.000.000 cm = 800 km

b) 1100 km = 110.000.000 cm => 110.000.000/2.000.000 = 55 cm en el plano

Posibles errores

- Que no se acuerde que la escala indica que 1 cm del plano representa a 2.000.000 cm en la realidad.
- Que se equivoque en las operaciones.
- Que no aplique bien la conversión de unidades.

Criterios de calificación

La pregunta vale **1 punto** repartido de la siguiente manera:

- El apartado a) vale **0,5 puntos** y
- el apartado b) otros **0,5 puntos**

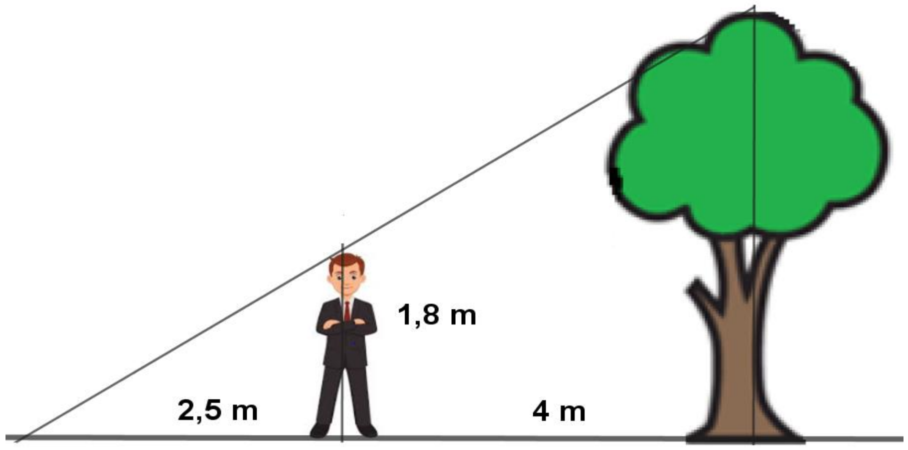
si las respuestas son correctas y están bien justificadas, con las operaciones incluidas.

Teniendo en cuenta que:

- Por errores en las tareas principales podremos quitar hasta un 100% de la puntuación.
- Por errores en las tareas auxiliares podremos quitar hasta un 67% de la puntuación.
- Por errores en las tareas auxiliares generales podremos quitar hasta un 33% de la puntuación.

Ejercicio 5. (2 puntos)

Eloy mide 1,80 m, y proyecta una sombra de 2,5 metros. Si se encuentra a la sombra de un árbol que tiene a una distancia de 4 metros, y las sombras llegan hasta el mismo punto, ¿qué altura tiene el árbol?



<u>Campo de problemas</u>

Este problema pertenece al campo 6: Distancias inaccesibles.

<u>Técnicas</u>

- Aplicación del Teorema de Thales. Triángulos en posición de Thales.
- Razón de semejanza: cociente entre la longitud de un lado de un polígono y la longitud del lado correspondiente del otro polígono. Si dos triángulos, ADE y ABC, son semejantes entonces diremos que su razón de semejanza es:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{CA}{EA} = k$$

Tecnologías

- Definición de semejanza.
- Teorema de Thales.
- Definición de triángulos en posición de Thales.

Tareas principales y auxiliares

- *Tareas principales*
  - Reconocer que los triángulos del problema están en posición de Thales.
  - Comprender lo que implica estar en posición de Thales.
  - Entender el concepto de semejanza y de razón de semejanza.
  - Conocer la fórmula del Teorema de Thales o en su defecto la de razón de semejanza.
- *Tareas auxiliares específicas*
  - Aplicar correctamente la fórmula del Teorema de Thales.
  - Aplicar correctamente la fórmula de la razón de semejanza.
- *Tareas auxiliares generales*
  - Operaciones aritméticas y algebraicas

Estándares de aprendizaje

- **Est.MA.1.2.1.** Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).
- **Est.MA.1.6.3.** Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.
- **Est.MA.3.4.1.** Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes.

Posibles respuestas correctas

La forma óptima de realizar el problema es aplicar Thales y se resuelve con una simple ecuación:

$$\frac{h}{1{,}8} = \frac{(2'5+4)}{2{,}5} = \frac{6{,}5}{2{,}5} \Rightarrow h = \frac{6{,}5 * 1{,}8}{2{,}5} = 4{,}68$$

Pero se puede hacer utilizando la razón de semejanza calculada de las dos bases de los triángulos semejantes, una vez obtenida utilizara para obtener la altura del árbol como lado proporcional a la altura de Eloy.

Posibles errores

- No darse cuenta de que están en posición de Thales y por tanto son semejantes
- Aplicar mal el teorema de Thales. Por ejemplo: $\frac{h}{4} = \frac{1{,}8}{2{,}5}$ porque no se dan cuenta que la base del triángulo menor es 2,5 y el mayor es 2,5+4, y sólo consideran 4 como base.
- Que la relación de lados que apliquen no sea correcta.
- Realizar mal las operaciones algebraicas e incluso aritméticas.

Criterios de calificación

Hallar la solución correcta razonando las operaciones con las explicaciones oportunas, valdrá **2 puntos**.

Se valorará positivamente una justificación razonada de porqué están en posición de Thales.

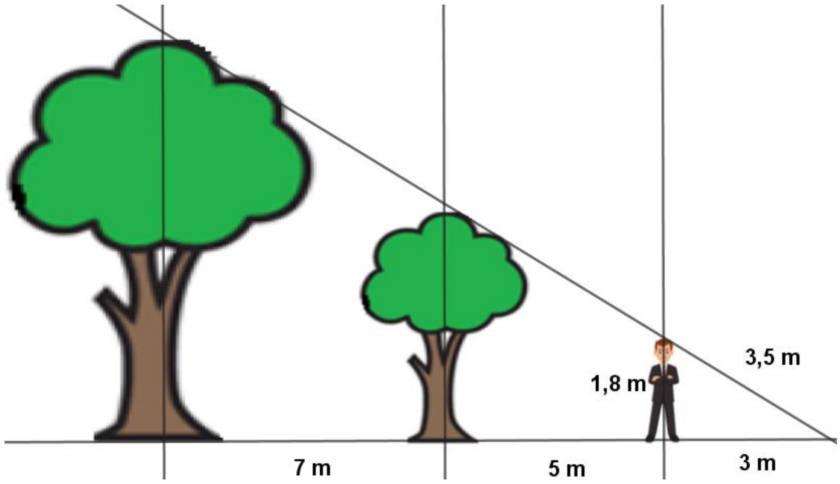
Teniendo en cuenta que:

- Por errores en las tareas principales podremos quitar hasta un 100% de la puntuación.
- Por errores en las tareas auxiliares podremos quitar hasta un 67% de la puntuación.
- Por errores en las tareas auxiliares generales podremos quitar hasta un 33% de la puntuación.

Ejercicio 6. (2 puntos)

Según puedes observar en la figura la cabeza de Eduardo, y las copas de dos arboles cercanos se encuentran alineadas con la sombra del sol.

a) Calcula la altura del árbol más alto.
b) Si un pájaro vuela desde la copa del árbol mas bajo a la copa del árbol más alto, ¿cuántos metros medirá su vuelo?



Campo de problemas

Este problema pertenece al campo 6: Distancias inaccesibles.

Técnicas

- Aplicación del Teorema de Thales. Triángulos en posición de Thales.
- Razón de semejanza: cociente entre la longitud de un lado de un polígono y la longitud del lado correspondiente del otro polígono. Si dos triángulos, ADE y ABC, son semejantes entonces diremos que su razón de semejanza es:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{CA}{EA}$$

Tecnologías

- Definición de semejanza.
- Teorema de Thales.
- Definición de triángulos en posición de Thales.

Tareas principales y auxiliares

- *Tareas principales*
  - Reconocer que los triángulos del problema están en posición de Thales.
  - Comprender lo que implica estar en posición de Thales.
  - Entender el concepto de semejanza y de razón de semejanza.
  - Conocer la fórmula del Teorema de Thales o en su defecto la de razón de semejanza.
- *Tareas auxiliares específicas*
  - Aplicar correctamente la fórmula del Teorema de Thales.
  - Aplicar correctamente la fórmula de la razón de semejanza.
- *Tareas auxiliares generales*
  - Operaciones aritméticas y algebraicas

Estándares de aprendizaje

- **Est.MA.1.2.1.** Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).
- **Est.MA.1.6.3.** Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.
- **Est.MA.3.4.1.** Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes.

Posibles respuestas correctas

La forma óptima de realizar el problema es aplicar Thales, pero se puede aplicar también Pitágoras, aunque complica las operaciones.

a) $\frac{h}{1,8} = \frac{3+5+7}{3} = \frac{15}{3} \Rightarrow h = \frac{15*1,8}{3} =$ 9 metros

También se podría hacer calculando la razón de semejanza con las bases de los triángulos y después multiplicar la razón por la altura de Eduardo.

b) Primera forma: Por Thales.

$$\frac{3,5}{3} = \frac{vuelo}{7} \Rightarrow vuelo = \frac{3,5*7}{3} = 8,16\, metros\ de\ vuelo$$

Segunda forma: Por Pitágoras.

Como en el apartado a) calculamos la altura del árbol bajo (4,8 metros). Por Pitágoras calculamos la hipotenusa desde el punto donde la sombra acaba hasta la copa del árbol bajo (9,33). Después calculamos la hipotenusa que forma el árbol alto (17,49). Restando las hipotenusas nos da que le vuelo del pájaro es de 8,16 metros.

Tercera forma: por proporcionalidad directa (difícil que se les ocurra en 2º ESO): Si la hipotenusa en 3 metros es 3,5, en 8 metros será x. Lo mismo para el triángulo más grande. Luego se restan y tenemos el vuelo del pájaro.

Posibles errores

- No darse cuenta de que están en posición de Thales y por tanto son semejantes
- Aplicar mal el teorema de Thales. Por ejemplo: $\frac{h}{3} = \frac{1,8}{7}$ porque no se dan cuenta que la base del triángulo menor es 3 y el mayor es 3+5+7, y sólo consideran 7 como base.
- Que la relación de lados que apliquen no sea correcta.
- Realizar mal las operaciones algebraicas e incluso aritméticas.
- Que comentas errores de redondeo.

Criterios de calificación

Hallar la solución correcta razonando las operaciones con las explicaciones oportunas, valdrá **2 puntos** que se repartirán de la siguiente manera:

- **1 punto** por el apartado a.
- **1 punto** por el apartado b.

Será necesaria una justificación razonada de cómo se llega a las soluciones para obtener la calificación máxima.

Teniendo en cuenta que:

- Por errores en las tareas principales podremos quitar hasta un 100% de la puntuación.
- Por errores en las tareas auxiliares podremos quitar hasta un 67% de la puntuación.
- Por errores en las tareas auxiliares generales podremos quitar hasta un 33% de la puntuación.

G2. Comunicación de resultados y actividad de aprovechamiento

En la siguiente sesión, y siguiendo las conclusiones obtenidas por Rochera, Colomina y Barberá (2001) para el aprovechamiento de la prueba de evaluación, se comunicará los a los alumnos los resultados de la prueba escrita, entregándoles el examen para que puedan revisar sus errores.

Seguidamente, y para sacar provecho a la prueba escrita aparte de como instrumento de evaluación, se efectuará la corrección conjunta en clase de los ejercicios de la prueba escrita.

El profesor explicará y comentará en la pizarra la resolución de los diferentes problemas que compusieron la prueba, a la vez destacará las principales respuestas y errores cometidos por los alumnos en cada uno de los ejercicios.

Durante dicha corrección en la pizarra, los estudiantes seguirán las explicaciones, preguntando las dudas que les pudieran quedar sobre algunos problemas y el profesor responderá a todas estas cuestiones surgidas.

Tras el proceso anterior, habrá algunos alumnos que solicitarán una revisión de su nota en alguno de los ejercicios, de tal manera el que profesor les atenderá y les modificará la nota si el alumno tiene razón en su queja.

Finalmente, el profesor recogerá todos los exámenes para su archivado, momento en el que concluirá la sesión y la unidad didáctica objeto del estudio.

H. Bibliografía

- Barrios, L., Cassinello, A., Cañas, J., Galo, J., Martín, M., Ramírez, C., … Ruíz, C. *Matemáticas 2º ESO*. Recuperado de http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas

- Boyer, C.B. (2001). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial

- Byrne, O. (1847). *The first six books of the elements of Euclid*. London: William Pickering

- Cabezas, J. M. A., & Sáez, I. M. (2011). Matemáticas de 2º ESO. Madrid: Grupo Bruño.

- Cid, E. y Muñoz, J.M. La Teoría Antropológica de lo Didáctico(TAD): Un marco teórico para la didáctica de las matemáticas – Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza, Aragón.

- Colera, J. y Gaztelu, I. (2005). *Matemáticas 2.* Madrid: Anaya.

- Escudero, I. (2005). Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *23*(3), 379-391.

- Gairín, J.M., Muñoz, J.M. y Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. *En Investigación en Educación Matemática XVI* (SEIEM), pp. 261-274.

- Gualdrón, É., y Gutiérrez, A. (2006). Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la semejanza. X *Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM), pp. 63-82.

- Hart, K. & otros. (1981). *Children`s understanding of mathematics: 11-16* (1 ed.). Londres, Inglaterra: John Murray.

- Lemonidis, C. (1990). *Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie*. (Tesis doctoral). Université Louis Pasteur. Francia

- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa. *Boletín Oficial del Estado, 10* de diciembre de 2013, núm. 295, pp. 97858-97921.

- Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. *Boletín Oficial del Aragón, 2 de* *junio de 2016*, núm. 105, pp. 12640-13458.

- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado, 3 de enero de 2015*, núm. 3, pp. 169-546.

- Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 1 de marzo de 2014*, núm. 52, pp. 19349-19420.

- Rochera, M.J., Colomina, R. y Barberá, E. (2001). Optimizar los aprendizajes de los alumnos a partir de los resultados de la evaluación en Matemáticas. *Investigación en la Escuela*, 45, pp. 33-44.